Roll No.

Total No. of Questions : **11**]

[Total No. of Printed Pages : 7

A–302(A)

B.Sc. (Part–III) Examination, 2024

MATHEMATICS

Paper - I

(Advanced Algebra)

Time : 3 Hours]

[*Maximum Marks : 66*

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :- सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :- सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :- पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. Define the following :

निम्नलिखित की परिभाषा दीजिए :

(i) Zero divisors in a ring

वलय में शून्य के भाजक

(ii) Characteristic of a ring

वलय का अभिलक्षण

(iii) Principal ideal

मुख्य गुणजावली

(iv) Euclidean ring

यूक्लिडीय वलय

(v) Vector subspace

सदिश उपसमष्टि

(vi) Linear dependence

रैखिक आश्रितता

(vii) Kernel of a homomorphism

समाकारिता की अष्टि

(viii) Sylvester's law of nullity

सिल्वेस्टर की शून्यता का नियम

(ix) Statement of Cayley-Hamilton theorem

कैली-हेमिल्टन प्रमेय का कथन

(x) Similar matrices

समरूप मैट्रिसेज

Section-B

(खण्ड-ब)

2. If a be an element of a ring R, then prove that $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$ is a subring of R.

यदि a किसी वलय R का एक अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$ R का एक उपवलय है।

Or

(अथवा)

The characteristic of an integral domain (field) is either zero or a prime number, prove it.

सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णांकीय प्रांत (क्षेत्र) का अभिलक्षण या तो शून्य होता है या अभाज्य संख्या।

3. Prove that if a be an element of a commutative ring R with unity, then the set $I = \{ra \mid r \in R\} = [a]$ is a principal ideal of R generated by a.

सिद्ध कीजिए कि यदि a किसी तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R का एक अवयव हो, तो समुच्चय $I = \{ra \mid r \in R\} = [a]$ a द्वारा जनित R में एक मुख्य गुणजावली है।

Or

(अथवा)

If R/I is a ring of residue classes in R, then :

(a) R is commutative $\Rightarrow$ R/I is also commutative

(b) R has unity $\Rightarrow$ R/I also has unity

यदि R/I वलय R का एक विभाग वलय है तो :

(अ) R क्रमविनिमेय है $\Rightarrow$ R/I भी क्रमविनिमेय है

(ब) R तत्समकी है $\Rightarrow$ R/I भी तत्समकी है

4. Examine which of the following sets is a subspace of the vector space $V_3(\mathbf{R})$:

(a) $W_1 = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

(b) $W_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in Q\}$

जाँच कीजिए कि निम्न समुच्चयों में से कौनसी सदिश समष्टि $V_3(R)$ की उपसमष्टि है :

(अ) $W_1 = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

(ब) $W_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in Q\}$

Or

(अथवा)

If the set $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ be a basis of the vector space $V_3(R)$, then prove that the set :

$$S' = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$$

will also be a basis of $V_3(\mathbf{R})$

यदि समुच्चय $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार है तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय :

$$S' = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$$

भी $V_3(R)$ का एक आधार होगा।

5. The Kernel of a linear transformation is subspace, prove it.

सिद्ध कीजिए कि किसी रैखिक प्रतिचित्रण की अष्टि एक उपसमष्टि होती है।

Or

(अथवा)

Prove that the following mapping defined from $V_2(R)$ to $V_3(R)$ are linear transformation. Also find its range, rank, null space and nullity :

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b), \forall a, b \in R$$

सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ से $V_3(R)$ तक परिभाषित निम्नलिखित मैपिंग रैखिक रूपांतरण है। इसकी रेंज, रैंक, शून्य समष्टि और शून्यता भी ज्ञात कीजिए :

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b), \forall a, b \in R$$

6. Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स A के आइगेन मान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Or

(अथवा)

Prove that the similar matrices have the same eigenvalues.

सिद्ध कीजिए समरूप मैट्रिसेज के आइगेन मान समान होते हैं।

Section–C

(खण्ड–स)

7. (i) Prove that a finite commutative ring without zero divisors is a field.

   सिद्ध कीजिए कि शून्य के भाजक रहित एक परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

   (ii) Prove that the set $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ is a subfield of the field $(R, +, \times)$ of real numbers.

   सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र $(R, +, \times)$ का एक उपक्षेत्र है।

8. Prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is maximal if the quotient ring R/I is a field.

   सिद्ध कीजिए कि किसी तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि विभाग वलय R/I एक फील्ड है।

9. If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V(F), then prove that :

   $$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

   यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

   $$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

10. (i) If F be a field of complex numbers and T be the function from F^3 to F^3 defined as follows. Verify that T is a linear transformation. Describe the null space of t :

$$T(a, b, c) = (a - b + 2c, 2a + b - c, -a - 2b)$$

माना F सम्मिश्र संख्याओं का एक फील्ड है तथा फलन $T : F^3 \to F^3$ निम्न प्रकार परिभाषित है। यह सत्यापित कीजिए कि T रैखिक रूपान्तरण है। T की शून्य समष्टि भी बताइए :

$$T(a, b, c) = (a - b + 2c, 2a + b - c, -a - 2b)$$

(ii) Let $T : R^3 \to R^3$ be a linear transformation defined as :

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

Find the rank and nullity of T.

माना $T : R^3 \to R^3$ एक रैखिक रूपान्तरण है, जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

T की कोटि एवं शून्यता ज्ञात कीजिए।

11. Show that the following matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स A विकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$