

S-380

B.Sc. (Part III) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Analysis)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

(1)

BI-56

S-380 P.T.O.

Section-A

1 each

(खण्ड-अ)

1. (i) Define Complete Ordered Field.
पूर्ण क्रमित क्षेत्र परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Connected Set.
सम्बद्ध समुच्चय परिभाषित कीजिए।
- (iii) In a metric space. Define distance between two sets.
एक दूरीक समष्टि में दो समुच्चयों के मध्य दूरी परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Closed Sphere.
संवृत गोलक परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Isometry.
समदूरीकता परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define sequentially compact metric space.
अनुक्रमशः संहत दूरीक समष्टि परिभाषित कीजिए।
- (vii) State Jordan curve theorem.
जोर्दां वक्र प्रमेय का प्रकथन दीजिए।
- (viii) Define analytic function.
विश्लेषिक फलन परिभाषित कीजिए।
- (ix) Define harmonic function.
प्रसंवादी फलन परिभाषित कीजिए।
- (x) Define bilinear transformation.
द्विरैखिक रूपान्तरण परिभाषित कीजिए।

Section-B

(खण्ड-ब)

4 each

2. Prove that between any two real numbers, there lie an infinite number of rational numbers.

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

Or

(अथवा)

Prove that the union of an arbitrary family of open sets is an open set.

सिद्ध कीजिए कि विवृत समुच्चयों के प्रत्येक समुदाय का संघ भी एक विवृत समुच्चय होता है।

BI-56

(2)

S-380

3. Let A be non-empty subset of a metric space (X, d) , then for $x, y \in X$, prove that :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

(X, d) दूरीक समष्टि में A एक अरिक्त उपसमुच्चय है तो $x, y \in X$ के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Or

(अथवा)

Prove that every Cauchy sequence in a metric space is bounded.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक कॉशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

4. Show that the function $f: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $f(x) = \frac{1}{x}$ is not uniformly continuous.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, जो $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित है एकसमान संतत् फलन नहीं है।

Or

(अथवा)

Prove that every finite subset in a metric space is compact.

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतत् होता है।

5. Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but its derivative exists only at the origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ सर्वत्र संतत् है किन्तु इसके अवकलज का अस्तित्व केवल मूलबिन्दु पर ही है।

Or

(अथवा)

Prove that the function :

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

is continuous and analytic every where.

सिद्ध कीजिए कि फलन

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

सर्वत्र संतत् एवं विश्लेषिक है।

(3)

A से
B - च 0

6. Show that function $u = \cos x \cosh y$ is harmonic and find its harmonic conjugate. सिद्ध कीजिए कि एक फलन $u = \cos x \cosh y$ प्रसंवादी फलन है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Show that both the transformations

$$w = \frac{1-z}{1+z} \text{ and } w = \frac{z-1}{z+1},$$

transform $|w| \leq 1$ into the half plane $\text{Re}(z) \geq 0$.

प्रदर्शित कीजिए कि दोनों रूपान्तरण

$$w = \frac{1-z}{1+z} \text{ तथा } w = \frac{z-1}{z+1},$$

$|w| \leq 1$ को अर्धसमतल $\text{Re}(z) \geq 0$ में रूपान्तरित करते हैं।

Section-C

(खण्ड-स)

12 each

7. Prove that every infinite bounded set has a limit point.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

8. If A and B are two bounded sets in a metric space (X, d) , then prove that $A \cup B$ is also bounded in (X, d) . <https://www.mgsuonline.com>

दूरीक समष्टि (X, d) में A तथा B दो परिबद्ध समुच्चय हैं तो सिद्ध कीजिए कि (X, d) में $A \cup B$ भी परिबद्ध होगा।

9. Let X and Y be two metric spaces, then prove that mapping $f: X \rightarrow Y$ is continuous if and only if inverse image of each open set in Y is open in X.

माना X तथा Y दो दूरीक समष्टियाँ हैं तब सिद्ध कीजिए कि फलन $f: X \rightarrow Y$ संतत है यदि और केवल यदि Y में प्रत्येक विवृत समुच्चय का प्रतिबिम्ब X में विवृत है।

10. State and prove the sufficient condition for a complex function $f(z)$ to be analytic.

एक सम्मिश्र फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध का प्रकथन देकर सिद्ध कीजिए।

11. Determine all bilinear transformations which maps the upper half plane

$\text{Im}(z) \geq 0$ into the circle $|w| \leq 1$.

समस्त द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो कि ऊपरी अर्धसमतल $\text{Im}(z) \geq 0$ को वृत्त $|w| \leq 1$ में प्रतिचित्रित करे।