

# S-367

## B.Sc. (Part-III) Examination, 2020

### MATHEMATICS

#### Second Paper

#### (Analysis)

*Time allowed : Three hours*

*Maximum Marks : 66*

#### SECTION – A

(Marks :  $1 \times 10 = 10$ )

Answer all **ten** questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

खण्ड – अ

(अंक :  $1 \times 10 = 10$ )

समस्त दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

#### SECTION – B

(Marks :  $4 \times 5 = 20$ )

Answer all **five** questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

खण्ड – ब

(अंक :  $4 \times 5 = 20$ )

समस्त पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

#### SECTION – C

(Marks :  $12 \times 3 = 36$ )

Answer any **three** questions out of **five** (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

खण्ड – स

(अंक :  $12 \times 3 = 36$ )

पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

#### SECTION – A

खण्ड – अ

1. (i) Define ordered field. 1  
 क्रमित क्षेत्र परिभाषित कीजिए।

- (ii) Define closed set 1  
 संवृत समुच्चय परिभाषित कीजिए।

- (iii) Define internal point in metric space. 1  
 दूरीक समष्टि में आंतरिक बिन्दु परिभाषित कीजिए।

- (iv) Define Cauchy sequence in a metric space.  
दूरीक समस्ति में काँशी अनुक्रम परिभाषित कीजिए। 1
- (v) Define uniform continuous function in a metric space.  
दूरीक समस्ति में एकसमान सतत फलन परिभाषित कीजिए। 1
- (vi) Define contracting mapping.  
संकुचित प्रतिचित्रण परिभाषित कीजिए। 1
- (vii) Define connected set for complex numbers.  
सम्मिश्र संख्याओं में सम्बद्ध समुच्चय परिभाषित कीजिए। 1
- (viii) Define analytic function.  
विश्लेषिक फलन परिभाषित कीजिए। 1
- (ix) Define harmonic function.  
प्रसंबादी फलन परिभाषित कीजिए। 1
- (x) Define bilinear transformation.  
द्विरेखिक रूपान्तरण परिभाषित कीजिए। 1

### SECTION – B

#### खण्ड – ब

2. Prove that between two different real numbers, there lie an infinite number of irrational numbers.

4

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

#### OR/अथवा

Prove that the intersection of finite number of open sets is an open set.

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ भी एक विवृत समुच्चय होता है।

3. Let the mapping  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by

4

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

then prove that  $d$  is metric for  $\mathbb{R}$ .

माना प्रतिचित्रण  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

तो सिद्ध कीजिए  $d$ ,  $\mathbb{R}$  में एक दूरीक है।

#### OR/अथवा

Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समस्ति में परिभाषित प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

4. Let  $X, Y, Z$  be three metric spaces and  $f: X \rightarrow Y$ ,

$g: Y \rightarrow Z$  be continuous functions, then prove that

$gof: X \rightarrow Z$  is also continuous function.

माना  $X, Y, Z$  तीन दूरीक समस्तियाँ हैं और  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  दोनों सतत फलन हैं, तो सिद्ध कीजिए  $gof: X \rightarrow Z$  भी एक सतत फलन है।

**OR/अथवा**

Prove that each finite subset in a metric space is compact.

सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समस्ति में प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संहत होता है।

5. Discuss the Stereographic projection. 4

त्रिविम प्रक्षेप की विवेचना कीजिए।

**OR/अथवा**

Prove that the function  $f(z) = \bar{z}$  is not differentiable at any point.

सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(z) = \bar{z}$  किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

6. Prove that a small arc in the  $z$ -plane through the point  $z_0$  is magnified in the ratio  $|f(z)| : 1$  in the  $w$ -plane under the transformation  $w = f(z)$  where  $f(z)$  is regular and  $f'(z) \neq 0$ . 4

यदि  $f(z)$  विश्लेषिक तथा  $f'(z) \neq 0$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $z$ -समतल में बिन्दु  $z_0$  से गुजरने वाले एक लघु चाप,  $w$ -समतल में  $w = f(z)$  रूपान्तरण के अन्तर्गत  $|f(z)| : 1$  के समानुपात में आवर्धन होता है।

**OR/अथवा**

Prove that the bilinear transformation  $w = \frac{2z+3}{3z+4}$  is a combination of elementary transformations.

सिद्ध कीजिए कि द्विरेखिक रूपान्तरण  $w = \frac{2z+3}{3z+4}$  प्रारम्भिक रूपान्तरणों का संयुक्त है।

## SECTION - C

### खण्ड - स

7. (a) Prove that every infinite bounded set has a limit point.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

(b) Prove that every closed and bounded subset of real numbers is compact. 6+6

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक संबृत एवं परिबद्ध उपसमुच्चय संहत होता है।

P.T.O.

8. (a) Let A and B be two bounded sets in a metric space  $(X, d)$ , then prove that  $A \cup B$  is also bounded in  $(X, d)$ .

माना दूरीक समष्टि  $(X, d)$  में A तथा B दो परिबद्ध समुच्चय हैं तो सिद्ध कीजिए कि  $A \cup B$  भी  $(X, d)$  में परिबद्ध है।

- (b) Prove that a subset of metric space is open if and only if it is the union of a family of open spheres. 6+6

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि का एक उपसमुच्चय विवृत है यदि और केवल यदि यह विवृत गोलकों के कुल का सम्मिलन है।

9. (a) Let X and Y be two metric spaces, then prove that a mapping  $f : X \rightarrow Y$  is continuous if and only if inverse image of each open set in Y is open in X.

माना X तथा Y दो दूरीक समष्टियाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि फलन  $f : X \rightarrow Y$  संतत है यदि और केवल यदि Y में प्रत्येक विवृत समुच्चय का प्रतिलोम प्रतिबिंब X में विवृत हो।

- (b) Prove that every sequentially compact metric space  $(X, d)$  is totally bounded. 6+6

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुक्रमशः संहत दूरीक समष्टि  $(X, d)$  पूर्णतः परिबद्ध होती है।

- 10 State and prove the necessary and sufficient condition for a complex function to be analytic. 12

एक सम्प्रिष्ठ फलन के विश्लेषिक फलन होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त को प्रकथन देकर सिद्ध कीजिए।

11. (a) Prove that the function  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  is harmonic and obtain its conjugate  $v(x, y)$  such that  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  is analytic.

सिद्ध कीजिए कि फलन  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  प्रसंबादी है तथा इसका संयुग्मी  $v(x, y)$  ज्ञात कीजिए ताकि  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  एक विश्लेषिक फलन हो।

- (b) Find a bilinear transformation that maps the points  $z = 2, i, -2$  into  $w = 1, i, -1$  respectively. 6+6

एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $z = 2, i, -2$  को क्रमशः  $w = 1, i, -1$  में प्रतिचित्रित करें।