Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **8**

SA–135

B.A./B.Sc. (Part–III) DUE Part–I
Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 68*

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A
(खण्ड–अ)

1. (i) If $\vec{r} = t^3 \hat{i} - \cos t \hat{j} + (t^2+1)\hat{k}$, then find $\frac{d\vec{r}}{dt}$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

   यदि $\vec{r} = t^3 \hat{i} - \cos t \hat{j} + (t^2+1)\hat{k}$, तो $\frac{d\vec{r}}{dt}$ तथा $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ज्ञात कीजिए।

   (ii) Define gradient of a scalar function.

   अदिश बिन्दु फलन की प्रवणता को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define irrotational vector.

   अघूर्णीय सदिश को परिभाषित कीजिए।

   (iv) Define Circulation.

   परिसंचारण को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define Gauss's divergence theorem.

   गॉस की अपसरण प्रमेय को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Find the co-ordinate of the centre of the following conic :

   $$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

   निम्नलिखित शांकव के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

   $$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

   (vii) Write central form of the equation of a sphere.

   केन्द्रीय रूप में गोले का समीकरण लिखिए।

   (viii) Define reciprocal cone.

   व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए।

   (ix) Write the polar equation of a line passing through two points (r_1, θ_1) and (r_2, θ_2).

   दो बिन्दुओं (r_1, θ_1) तथा (r_2, θ_2) से गुजरने वाली रेखा का ध्रुवीय समीकरण लिखिए।

   (x) Define Enveloping Cylinder.

   अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए।

   (xi) Define centre of conicoid.

   शांकवज के केन्द्र को परिभाषित कीजिए।

   (xii) Define diametral plane for paraboloids.

   परवलज के लिए व्यासग तल को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are constant vectors, n is a constant and $\vec{r}$ is a vector function of the scalar variable t given by :

$$\vec{r} = (\cos nt)\,\vec{a} + (\sin nt)\,\vec{b}$$

then prove that :

(i) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + n^2\vec{r} = 0$

(ii) $\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt} = n(\vec{a} \times \vec{b})$

यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ अचर सदिश हैं, n कोई अचर है तथा सदिश फलन $\vec{r}$, t का एक फलन है :

$$\vec{r} = (\cos nt)\,\vec{a} + (\sin nt)\,\vec{b}$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + n^2\vec{r} = 0$

(ii) $\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt} = n(\vec{a} \times \vec{b})$ (2+2)

Or

(अथवा)

Show that the following vector is solenoidal :

सिद्ध कीजिए कि निम्न सदिश परिनालिकीय सदिश है :

$$(x+3y)\hat{i} + (y-3z)\hat{j} + (x-2z)\hat{k}$$ (4)

3. Evaluate $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$ and C is the curve $y = x^2$ is xy-plane from (0, 0) to (3, 9).

मान ज्ञात कीजिए $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$ तथा C, xy समतल में बिन्दु (0, 0) से (3, 9) तक वक्र $y = x^2$ है।

Or

(अथवा)

Evaluate by Green's theorem :

$$\int_C (e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy)$$

where C is the rectangle with vertices (π, 0), (0, 0), $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ग्रीन प्रमेय से मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy)$$

जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष (π, 0), (0, 0), $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हैं।

4. Find the equations of asymptotes of the following hyperbola :

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

निम्न अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

Or

(अथवा)

Find the condition that the straight line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may touch the circle $r = 2a \cos \theta$.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श करे।

5. Find the equation of the sphere passing through the points :

(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) and (0, 0, c).

निम्न बिन्दुओं से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए :

(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) तथा (0, 0, c).

Or

(अथवा)

Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and base is the guiding curve :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) तथा आधार निर्देशक वक्र $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$ है।

6. Find the equation of two planes which contain the line $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ and touch the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$.

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ से गुजरते हैं और दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करते हैं।

Or

(अथवा)

The plane $3x + 4y = 1$ is a diametral plane of the paraboloid $5x^2 + 6y^2 = 2z$, then find the equation to the chord through (3, 4, 5) which it bisects.

परवलज $5x^2 + 6y^2 = 2z$ का एक व्यासग समतल $3x + 4y = 1$ है। बिन्दु (3, 4, 5) से जाने वाली तथा इस पर समद्विभाजित होने वाली जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Section–C
(खण्ड–स)

7. If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, prove that :

(i) $\text{div}\,\vec{r} = 3$

(ii) $\text{div}\,\hat{r} = \frac{2}{3}$

(iii) $\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, है, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\text{div}\,\vec{r} = 3$

(ii) $\text{div}\,\hat{r} = \frac{2}{3}$

(iii) $\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ (4+4+4)

8. (a) Evaluate :

$$\iint_S \vec{F}.\hat{n}\,dS$$

where $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$, S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\iint_S \vec{F}.\hat{n}\,dS$$

जहाँ $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$, S उस घन का पृष्ठ है जो कि निम्न समतलों में परिबद्ध है :

$x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$

(b) If $\vec{r} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$, $\vec{s} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{v} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$, then prove that :

$$\int_1^2 \vec{r}.(\vec{s} \times \vec{v})\, dt = 0$$

यदि $\vec{r} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$, $\vec{s} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{v} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि :

(6+6)

$$\int_1^2 \vec{r}.(\vec{s} \times \vec{v})\, dt = 0$$

9. Find the nature of the conic represented by the equation $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ and trace it also.

समीकरण $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ द्वारा प्रदर्शित शांकव की प्रकृति ज्ञात कीजिए एवं इसका अनुरेखन भी कीजिए। (12)

10. (a) Find the equation of sphere which passes through point (α, β, γ) and the circle $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$.

बिन्दु (α, β, γ) और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$ से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the equation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

represents a cone if :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$$

सिद्ध कीजिए कि समीकरण :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

एक शंकु को निरूपित करती है, यदि :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$$

(6+6)

11. (a) Find the points of intersection of the line $\frac{x+5}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{x-11}{7}$ and the surface $12x^2 - 17y^2 + 7z^2 = 7$.

रेखा $\frac{x+5}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{x-11}{7}$ तथा पृष्ठ $12x^2 - 17y^2 + 7z^2 = 7$ का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the feet of the normals from the point (α, β, γ) to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$ lie on the following sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + \gamma)\, z - (\alpha^2 + \beta^2)\, \frac{y}{2\beta} = 0$$

सिद्ध कीजिए कि परवलज $x^2 + y^2 = 2az$ पर बिन्दु (α, β, γ) से खींची अभिलम्बों के पाद निम्न गोले पर स्थित हैं :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + \gamma)\, z - (\alpha^2 + \beta^2)\, \frac{y}{2\beta} = 0$$ (6+6)