

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 7

SA-212

B.A./B.Sc. (Part-III) DUE of B.A./B.Sc. Part-II Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-1417

(1)

SA-212 P.T.O.

Section-A

(खण्ड-अ)

1. (i) Write Removable discontinuity.
अपनेय असांतत्यता को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Write statement of Mostest theorem.
Mostest (मॉसटेस्ट) प्रमेय का प्रकथन (Statement) लिखिए।
- (iii) Check the differentiability of the function $f(x) = |x - 1|$ at $x = 1$.
फलन $f(x) = |x - 1|$ की $x = 1$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।
- (iv) Write statement of Cauchy's mean value theorem.
कॉशी मध्यमान प्रमेय का प्रकथन लिखिए।
- (v) Explain Darboux sums.
डारबू योग को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Write definition of integral function.
समाकल फलन की परिभाषा लिखिए।
- (vii) Write definition of Oscillatory sequence.
दोलनी अनुक्रम की परिभाषा लिखिए।
- (viii) Write Hyper Harmonic Series.
हाइपर हारमोनिक श्रेणी लिखिए।
- (ix) Write Abel's Test.
Abel (ऐबल) का परीक्षण लिखिए।
- (x) Write Euler's formulae.
Euler (आयलर) का सूत्र लिखिए।

Section-B

(खण्ड-ब)

2. Using ϵ - δ definition of limit, prove that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} (ax + by) = 5a - 2b$$

सीमा की ϵ - δ परिभाषा के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} (ax + by) = 5a - 2b$$

Or

(अथवा)

Examine the continuity the function f defined by $f(x) = |x| + |x - 1|$ at $x = 1$.

फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$ की $x = 1$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।

3. Prove that the following function f is continuous but not differentiable at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 0$ पर सतत् किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Or

(अथवा)

Is the Rolle's theorem applicable for the following function in the interval $[a, b]$?

If yes, then verify the theorem :

$$f(x) = \log \left\{ \frac{x^2 + ab}{x(a+b)} \right\}, 0 \notin [a, b]$$

क्या निम्न फलन के लिये अन्तराल $[a, b]$ में रोल प्रमेय लागू होता है ? यदि हाँ, तो रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = \log \left\{ \frac{x^2 + ab}{x(a+b)} \right\}, 0 \notin [a, b]$$

4. If $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, prove that :

$$f \in R[0, 1] \text{ and } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

यदि $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, सिद्ध कीजिए कि :

$$f \in R[0, 1] \text{ तथा } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Or

(अथवा)

Every continuous function is R-integrable.

प्रत्येक सतत् फलन R-समाकलनीय होता है।

5. Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ is convergent, where :

$$x_n = \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right]$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ अभिसारी है, जहाँ :

$$x_n = \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right]$$

Or

(अथवा)

Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4 + \dots$$

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4 + \dots$$

6. Test the convergence of the following integral :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

निम्नलिखित समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

Or

(अथवा)

Find Fourier series for the following function :

$$f(x) = x^2 \quad -\pi < x < \pi$$

निम्नलिखित फलन के लिए फूरियर की श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x^2 \quad -\pi < x < \pi$$

Section-C

(खण्ड-स)

7. (a) Prove that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

does not exist.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

विद्यमान नहीं है।

6

- (b) If a function f is continuous in a closed interval $[a, b]$, then it is bounded in that interval.

यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् हो, तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है। 6

8. (a) Compute the value of θ for the function $f(x) = ax^2 + bx + c$ in the following form of Lagrange's mean value theorem :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h); \quad 0 < \theta < 1$$

फलन $f(x) = ax^2 + bx + c$ के लिये निम्न लैग्रेंज मध्यमान प्रमेय के रूप में θ का मान ज्ञात कीजिए :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h); \quad 0 < \theta < 1$$

6

- (b) Find Lagrange's and Cauchy's remainder after n terms in the expansion of :

$$f(x) = \log(1+x)$$

निम्न फलन के विस्तार में n पदों के पश्चात् लैग्रान्ज व कॉशी रूप वाले शेषफल ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \log(1+x)$$

6

9. (a) If 'f' is bounded function defined on [a, b] then for every $\epsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $\forall P \in P[a, b]$ with $\|P\| \leq \delta$:

फलन f अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित परिसीमित है तो प्रत्येक $\epsilon > 0$ के संगत कोई ऐसा $\delta > 0$ विद्यमान होगा कि प्रत्येक विभाजन $P \in P[a, b]$, $\|P\| \leq \delta$ के लिये :

$$(i) \quad U(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$$

$$(ii) \quad L(f, P) > \int_a^b f(x)dx - \epsilon$$

6

- (b) If function $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \dots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$ is the partition of $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ then $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

यदि फलन $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ तथा $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \dots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

का Partition (विभाजन) है तब $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ।

6

10. (a) Show the following series is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$:

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \dots$$

सिद्ध कीजिए निम्न श्रेणी अभिसारी है यदि $x < 1$ और अपसारी है यदि $x \geq 1$:

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \dots$$

6

- (b) Examine the following series is convergent when $x \leq \frac{1}{e}$ and divergent

when $x > \frac{1}{e}$:

$$x + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{3^3 x^3}{3} + \frac{4^4 x^4}{4} + \dots x > 0$$

निम्न श्रेणी अभिसारी है यदि $x \leq \frac{1}{e}$ तथा अपसारी है यदि $x > \frac{1}{e}$ की जाँच कीजिए :

$$x + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{3^3 x^3}{3} + \frac{4^4 x^4}{4} + \dots x > 0$$

6

11. Find the Fourier series for the following function :

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{for } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}$$

निम्न फलन के लिये फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{for } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}$$

12