Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

A–332

B.A./B.Sc. (Part–III) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

(Advanced Algebra)

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

https://www.mgsuonline.com/

Section–A

(खण्ड–अ)

1. Define the following :

   निम्नलिखित की परिभाषा लिखिए :

   (i) Zero divisor

   शून्य भाजक

   (ii) Characteristic of an integral domain

   पूर्णांकीय प्रांत का अभिलक्षण

   (iii) Prime ideal

   अभाज्य गुणजावली

   (iv) Euclidean ring

   यूक्लिडियन रिंग

   (v) Linear span

   एकघात विस्तृति

   (vi) Basis of a vector space

   सदिश समष्टि का आधार

   (vii) Rank of a linear transformation

   रैखिक रूपांतरण की कोटि

   (viii) Nullity of a linear transformation

   रैखिक रूपांतरण की शून्यता

   (ix) Similar matrices

   समरूप मैट्रिसेज

   (x) Minimal polynomial

   अल्पिष्ट बहुपद

https://www.mgsuonline.com/

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Show that every field is an integral domain.

दिखाइए कि प्रत्येक क्षेत्र पूर्णांकीय प्रांत होता है।

Or

(अथवा)

Construct the quotient field of the integral domain of residue class (modulo 3).

अवशेष कक्षा (मॉड्यूलो 3) के पूर्णांकीय प्रांत के भागफल क्षेत्र की रचना कीजिए।

3. Show that a field has no proper ideal.

दिखाइए कि क्षेत्र में कोई उचित गुणजावली नहीं होती।

Or

(अथवा)

If $f(x) = 3 + 5x - 7x^2$ and $g(x) = 5 + 2x - 7x^3$ are any two polynomials over the ring $(z_8, +_8, \cdot_8)$, then find $f(x)\ g(x)$.

यदि रिंग $(z_8, +_8, \cdot_8)$ पर $f(x) = 3 + 5x - 7x^2$ और $g(x) = 5 + 2x - 7x^3$ कोई दो बहुपद हों, तो $f(x)\ g(x)$ को ज्ञात कीजिए।

4. If V is a vector space over field F, then show that :

(i) $\alpha.\ (-v) = (-\alpha)\ .v\ ,\ \alpha \in F,\ v \in V$

(ii) $(-\alpha).v = -\ (\alpha.v)\ ,\ \alpha \in F,\ v \in V$

https://www.mgsuonline.com/

यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि हो, तो दिखाइए :

(i) $\alpha.(-v) = (-\alpha).v,\ \alpha \in F,\ v \in V$

(ii) $(-\alpha).v = -(\alpha.v),\ \alpha \in F,\ v \in V$

Or

(अथवा)

Show that the set W is a subspace of vector space $V_3(R)$, where W is as below :

$$W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0,\ x, y, z \in R\}$$

दिखाइए कि समुच्चय W सदिश समष्टि $V_3(R)$ की उपसमष्टि है; जहाँ W निम्न प्रकार है :

$$W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0,\ x, y, z \in R\}$$

5. Is mapping $t : V_2(R) \to V_3(R)$, defined as below, a linear transformation ?

$$t(a, b) = (a + b, a - b, b)$$

क्या प्रतिचित्रण $t : V_2(R) \to V_3(R)$ रैखिक रूपांतरण है ? जहाँ t निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$t(a, b) = (a + b, a - b, b)$$

Or

(अथवा)

If W is a subspace of vector space V(F), then show that annihilator of W, A(W), is a subspace of V*.

यदि W सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि हो तो दिखाइए W का शून्यकारी, A(W), V* की उपसमष्टि होती है।

https://www.mgsuonline.com/

6. Find the eigen values and corresponding eigen vector of the matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A के आइगन मान तथा इनके संगत आइगन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Or

(अथवा)

Find the minimal polynomial of the matrix B :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स B का अल्पिष्ट बहुपद ज्ञात कीजिए :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. If $\phi : R \to S$ be a ring homomorphism with kernel K, then show that ϕ will be a monomorphism iff $K = \{0\}$.

यदि $\phi : R \to S$ पर रिंग समाकारिता है जिसकी अष्टि K हो, तो दिखाइए ϕ एकैक समाकारिता होगी यदि और केवल यदि $K = \{0\}$.

https://www.mgsuonline.com/

8. Show that an ideal I of a commutative ring R with unity is maximal iff quotient ring R/I is a field.

दिखाइए कि तत्समकी क्रमविनिमेय रिंग R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली होगी यदि और केवल यदि विभाग रिंग R/I एक क्षेत्र हो।

9. (i) Express the vector $W \in V_3(R)$ as a linear combination of vectors v_1, v_2, v_3 :

$$W = (5, 9, 5),\ v_1 = (2, 1, 4),\ v_2 = (1, -1, 3),\ v_3 = (3, 2, 6)$$

सदिश समष्टि $V_3(R)$ के सदिश W को सदिश v_1, v_2, v_3 के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ :

$$W = (5, 9, 5),\ v_1 = (2, 1, 4),\ v_2 = (1, -1, 3),\ v_3 = (3, 2, 6)$$

(ii) Is the set S, as given below, a basis, of $V_3(R)$? Where :

$$S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$$

क्या निम्न समुच्चय S, $V_3(R)$ का आधार है ? जहाँ :

$$S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$$

10. Find the range, rank, null space and nullity of linear transformation $t : V_2(R) \to V_3(R)$ defined as :

$$t(a, b) = (a - b, b - a, -a),\ a, b \in R$$

रैखिक रूपान्तरण $t : V_2(R) \to V_3(R)$, जहाँ :

$$t(a, b) = (a - b, b - a, -a),\ a, b \in R$$

का परिसर, कोटि, शून्य समष्टि तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

https://www.mgsuonline.com/

11. (i) Show that similar matrices have the same eigen values.

दिखाइए कि समरूप मैट्रिसेज के आइगन मान समान होते हैं।

(ii) Show that the minimal polynomial of a matrix is unique.

दिखाइए कि मैट्रिक्स का अल्पिष्ट बहुपद अद्वितीय होता है।

https://www.mgsuonline.com/