

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 7

A-304

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - I

(Advanced Algebra)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 marks.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BRI-70

(1)

A-304 P.T.O.

Section–A

(खण्ड–अ)

1. Define the following :

निम्नलिखित की परिभाषा दीजिए :

- (i) Integral domain
पूर्णाकीय प्रान्त
- (ii) Ring homomorphism
रिंग समाकारिता
- (iii) Maximal ideal
उच्चिष्ठ गुणजावली
- (iv) Remainder theorem
शेषफल प्रमेय
- (v) Basis
आधार
- (vi) Linear independence
एकघात स्वतंत्र
- (vii) Dual space
द्वैती समष्टि
- (viii) Linear transformation
रैखिक प्रतिचित्रण
- (ix) Minimal polynomial
अल्पिष्ठ बहुपद
- (x) Diagonalizable matrix
विकर्णीय आव्यूह

Section-B

(खण्ड-ब)

2. Prove that the intersection of two subrings is again a subring.

सिद्ध कीजिए दो अवयवों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

Or

(अथवा)

Prove that the set $S = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ is a subfield of field $(\mathbb{R}, +, \times)$ of real numbers.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र $(\mathbb{R}, +, \times)$ का एक उपक्षेत्र है।

3. Let f be a ring homomorphism from $(\mathbb{R}, +, \times)$ to $(\mathbb{R}, +, \times)$. Prove that $(\ker f, +, \times)$ is an ideal of $(\mathbb{R}, +, \times)$.

माना f , $(\mathbb{R}, +, \times)$ से $(\mathbb{R}, +, \times)$ में रिंग समाकारिता है। सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि $(\ker f, +, \times)$ रिंग \mathbb{R} की गुणजावली होती है।

Or

(अथवा)

Find the quotient ring $\frac{\mathbb{R}}{I}$, where $I = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ and $\mathbb{R} = (\mathbb{Z}, +, \times)$.

विभाग वलय $\frac{\mathbb{R}}{I}$ ज्ञात कीजिए जहाँ $I = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ तथा $\mathbb{R} = (\mathbb{Z}, +, \times)$ ।

4. Examine which of the following sets of vectors $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ in \mathbb{R}^n are subspaces of \mathbb{R}^n . ($n \geq 3$)

(a) $\forall \alpha, a_1 + 3a_2 = a_3$

(b) $\forall \alpha, a_1 \cdot a_2 = 0$

BRI-70

(3)

A-304 P.T.O.

जाँच कीजिए कि R^n के निम्न सदिशों $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ के समुच्चयों में से कौन-कौनसे R^n की उपसमष्टि है। ($n \geq 3$)

(अ) $\forall \alpha, a_1 + 3a_2 = a_3$

(ब) $\forall \alpha, a_1 \cdot a_2 = 0$

Or

(अथवा)

Prove that the set $S = \{a + ib, c + id\}$ is a basis set of the vector space $C(R)$ if and only if $ad - bc \neq 0$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{a + ib, c + id\}$ सदिश समष्टि $C(R)$ का एक आधार समुच्चय है यदि और केवल यदि $ad - bc \neq 0$ ।

5. If the mapping $T : V(F) \rightarrow V'(F)$ is one-one onto linear map, then show that $T^{-1} : V' \rightarrow V$ will also be a linear map.

यदि प्रतिचित्रण $T : V(F) \rightarrow V'(F)$ एकैकी आच्छादक रैखिक प्रतिचित्रण हो तो सिद्ध कीजिए कि $T^{-1} : V' \rightarrow V$ भी रैखिक प्रतिचित्रण होगा।

Or

(अथवा)

Find the matrix of a linear transformation T relative to their standard basis where T is defined as $T : V_2 \rightarrow V_3$ such that

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_2, 7a_2)$$

रैखिक रूपान्तरण T की उनके मानक आधार के सापेक्ष मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए जहाँ T इस प्रकार परिभाषित है $T : V_2 \rightarrow V_3$ अतः

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_2, 7a_2)$$

6. Find the Eigen values and Eigen vectors of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स A के आइगेन मान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Or

(अथवा)

Show that similar matrices have the same minimal polynomial.

दिखाइए कि समरूप मैट्रिसेज के अल्पिष्ठ बहुपद भी समान होते हैं।

Section-C

(खण्ड-स)

7. (i) Every field is necessarily an integral domain but the converse is not necessarily true.

प्रत्येक फील्ड (क्षेत्र) अनिवार्यतः प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता।

- (ii) Show that the set of real numbers of the form $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ with ordinary addition and multiplication of numbers forms a ring. Is it a field ?

सिद्ध कीजिए कि $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ प्रकार की वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संख्याओं के योग एवं गुणा के लिए वलय है। क्या यह वलय एक क्षेत्र है ?

8. Show that an ideal I of a commutative ring R with unity is prime iff $\frac{R}{I}$ is an integral domain.

किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय R की कोई गुणजावली I अभाज्य गुणजावली होती है यदि $\frac{R}{I}$ एक पूर्णाकीय प्रान्त है।

9. If W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उपसमष्टि है, तो :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

10. (i) If T is a linear transformation defined from a vector space $V(F)$ to $V'(F)$ where $V(F)$ is finite dimensional, then :

$$\text{Rank } (T) + \text{Nullity } (T) = \dim V$$

यदि T सदिश समष्टि $V(F)$ से $V'(F)$ में परिभाषित एक रैखिक रूपान्तरण है, जहाँ $V(F)$ परिमित विमीय है, तो :

$$\text{Rank } (T) + \text{Nullity } (T) = \dim V$$

(ii) Prove that the following mapping defined from $V_2(\mathbb{R})$ to $V_3(\mathbb{R})$ are linear transformaton, for each find :

(a) Rank

(b) Nullity

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

सिद्ध कीजिए कि $V_2(\mathbb{R})$ से $V_3(\mathbb{R})$ में परिभाषित निम्न प्रतिचित्रण रैखिक रूपान्तरण है। प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए :

(अ) कोटि

(ब) शून्यता।

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

11. Show that the following matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स A विकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$