

A-336**B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2022****MATHEMATICS****Paper - II****(Analysis)**

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A**(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B**(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C**(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BR-506

(1)

A-336

Section-A

(खण्ड-अ)

1. (i) State Heine-Borel Theorem.
हेने-बॉरल प्रमेय का कथन लिखिए।
- (ii) Define limit point of a Set.
समुच्चय सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define diameter of a Set.
समुच्चय के व्यास को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Perfect Set.
परिपूर्ण समुच्चय को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Compactness.
संहत को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Continuous Function.
सतत् फलन को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Complex Plane.
सम्मिश्र समतल को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Write statement of Jordan Curve Theorem.
जॉर्डन वक्र प्रमेय का कथन लिखिए।
- (ix) Write sufficient condition for a Conformal Mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण के लिए पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए।
- (x) Write necessary condition for Conformal Mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण के लिए आवश्यक प्रतिबंध लिखिए।

Section-B

(खण्ड-ब)

2. State and prove 'Bolzano-Weierstrass' Theorem.
'Bolzano-Weierstrass' प्रमेय का कथन लिखिए तथा सत्यापित कीजिए।

Or

(अथवा)

The intersection of a finite number of neighbourhood of A is also a neighbourhood of A.

सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु का प्रतिवेश समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक बिन्दु का प्रतिवेश समुच्चय होता है।

3. Prove that in a metric space, every open sphere is an open set.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

Or

(अथवा)

Prove that in a metric space (X, d) the finite union of closed sets is closed.

सिद्ध कीजिए कि दूरिक समष्टि (X, d) का संवृत समुच्चयों का परिमित संघ समुच्चय एक संवृत समुच्चय होता है।

4. Prove that the continuous image of a compact set is compact.

सिद्ध कीजिए कि संहत समुच्चय का सतत् प्रतिबिम्ब संहत होता है।

Or

(अथवा)

Prove that every convergent sequence in metric space is bounded.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

5. Prove that the function $f(z) = \cosh y \sin x + i \cos x \sinh y$ is continuous and analytic every where. <https://www.mgsuonline.com>

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \cosh y \sin x + i \cos x \sinh y$ सर्वत्र सतत् एवं विश्लेषिक है।

Or

(अथवा)

Prove that the function defined by :

$$f(z) = \frac{x^2 y^5 (x + iy)}{x^4 + y^{10}}, z \neq 0$$

and $f(0) = 0$ is not analytic at the origin though Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = \frac{x^2 y^5 (x + iy)}{x^4 + y^{10}}, z \neq 0$ तथा $f(0) = 0$ मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है जबकि इस बिन्दु पर कौशी-रीमान समीकरण संतुष्ट है।

6. Show that both the transformations $w = \frac{1-z}{1+z}$ and $w = \frac{z-1}{z+1}$ transforms $|w| \leq 1$ into the half plane $\text{Re}(z) \geq 0$.

प्रदर्शित कीजिए कि दोनों रूपान्तरण $w = \frac{1-z}{1+z}$ तथा $w = \frac{z-1}{z+1}$ $|w| \leq 1$ को अर्धसमतल $\text{Re}(z) \geq 0$ में रूपान्तरित करते हैं।

Or

(अथवा)

Show that $u = x^3 - 3xy^2$ is a harmonic function. Find the corresponding analytic function.

सिद्ध कीजिए कि $u = x^3 - 3xy^2$ एक प्रसंवादी फलन है। संगत विश्लेषिक फलन भी ज्ञात कीजिए।

Section-C

(खण्ड-स)

7. A subset A of R is compact iff A is bounded and closed. Prove it.

R का कोई उपसमुच्चय A संहत होता है यदि और केवल यदि A परिबद्ध एवं संवृत होता, तो इसे सिद्ध कीजिए।

8. State and prove Baire-Category Theorem.

बेयर-संवर्ग प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

9. Let (X, d) be a complete metric space and d is a contraction mapping on X, then there exists unique fixed x in X such that $f(x) = x$. Prove it.

माना कि (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा d , X पर संकुचित फलन है तब X में अद्वितीय स्थिर x इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f(x) = x$ सिद्ध कीजिए।

10. If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ and $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2 \cos x - e^y - e^{-y}}$,

show that $f(z)$ subject to the condition $f(\pi/2) = 0$ is $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot(z/2)$.

यदि $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का विश्लेषिक फलन हो और $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2 \cos x - e^y - e^{-y}}$,

प्रदर्शित कीजिए कि $f(z)$ प्रतिबंध $f(\pi/2) = 0$ के अन्तर्गत $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot(z/2)$ होगा।

11. Find the image of the infinite strip $(1/4) < y < (1/2)$ under the transformation $w = 1/z$.

रूपान्तरण $w = 1/z$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $(1/4) < y < (1/2)$ का प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।