

**A-312****B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2023****MATHEMATICS**

Paper - II

(Analysis)

Time : 3 Hours ]

[ Maximum Marks : 66

**Section-A**

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all ten questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

टिप :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

**Section-B**

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all five questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

टिप :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

**Section-C**

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any three questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

टिप :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

**3RI-129**

( 1 )

**A-312 P.T.O.**

Section-A (खण्ड-अ)

1. (i) Define Ordered field.  
क्रमित क्षेत्र की परिभाषा लिखिए।
- (ii) Define connected set.  
सम्बद्ध समुच्चय की परिभाषा लिखिए।
- (iii) Define bounded metric space.  
परिबद्ध दूरिक समष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define exterior point.  
बाह्य बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Cauchy sequence.  
कोशी अनुक्रम की परिभाषा लिखिए।
- (vi) Write Bolzano Weierstrass property.  
बोलजानो वीयरस्ट्रैस प्रगुण लिखिए।
- (vii) Define complex function.  
सम्मिश्र फलन को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define conjugate harmonic function.  
संयुग्मी प्रसंवादी फलन की परिभाषा लिखिए।
- (ix) Define conformal mapping.  
अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।
- (x) Define invariant points of a Bilinear transformation.  
द्विरैखिक रूपान्तरण के निश्चर बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

Section-B (खण्ड-ब)

2. Between any two different real numbers, there lie an infinite number of rational numbers.

किसी दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

Or (अथवा)

The set  $\mathbb{R}$  of real numbers is a connected set.

वास्तविक संख्याओं का समुच्चय  $\mathbb{R}$  सम्बद्ध समुच्चय है।

BRI-129

3/ Let the mapping  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

then  $d$  is a metric on  $\mathbb{R}$ .

मान लीजिए एक प्रतिचित्रण  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  में

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

परिभाषित है तब  $d, \mathbb{R}$  में एक दूरिक है।

Or (अथवा)

In a metric space every closed sphere is a closed set.

✓ किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय है।

4/ Every Cauchy sequence in a metric space is bounded.

दूरिक समष्टि में प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

Or (अथवा)

If  $E$  is an infinite subset of a compact set  $k$ , then  $E$  has a limit point in  $k$ .

यदि संवृत समुच्चय  $k$  का  $E$  एक अपरिमित उपसमुच्चय है, तो  $E$  का सीमा-बिन्दु  $k$  में है।

5/ If  $n$  is real, show that  $r^n(\cos n\theta + i \sin \theta)$  is analytic except where  $r = 0$  and then its derivative is :

$$nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta]$$

यदि  $n$  वास्तविक है तो प्रदर्शित कीजिए कि  $r^n(\cos n\theta + i \sin \theta)$ ,  $r = 0$  के अतिरिक्त विश्लेषिक है तथा इसका अवकलज है :

$$nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta]$$

Or (अथवा)

Show that the function  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  is not analytic at the origin, although the Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.

✓ सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है, यद्यपि मूल बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है।

6/ If  $f(z) = u + iv$  is an analytic function and  $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ , then find  $f(z)$  in terms of  $z$ .

यदि  $f(z) = u + iv$  एक विश्लेषिक फलन हो तथा  $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ , तो  $f(z)$  को  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

Or (अथवा)

Find the image of the infinite strip  $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$  under the transformation  $W = \frac{1}{z}$ .

रूपान्तरण  $W = \frac{1}{z}$  के अन्तर्गत अनन्त पट्टी  $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$  का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

### Section-C (खण्ड-स)

7. If  $x$  and  $y$  are any two positive real numbers, then  $\exists n \in \mathbb{N}$  such that :

$$nx > y$$

यदि  $x$  और  $y$  कोई दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हों तो  $\exists$  एक ऐसा धन पूर्णांक  $n \in \mathbb{N}$  विद्यमान होता है कि :

$$nx > y$$

8. Let  $A$  be a subset of a metric space, then :

$$\bar{A} = A \cup D(A)$$

किसी दूरिक समष्टि  $(X, d)$  के एक उपसमुच्चय  $A$  के लिए सिद्ध कीजिए :

$$\bar{A} = A \cup D(A)$$

9. Let  $X$  and  $Y$  are two metric spaces, then a mapping  $f: X \rightarrow Y$  is continuous iff inverse image of each open set in  $Y$  is open in  $X$ .

माना  $X$  तथा  $Y$  दो दूरिक समष्टियाँ हैं तब एक फलन  $f: X \rightarrow Y$  सतत् है यदि और केवल यदि  $Y$  में प्रत्येक विवृत समुच्चय का प्रतिलोम प्रतिबिम्ब  $X$  में विवृत है।

10. Write proof of polar form of Cauchy-Riemann equations.

कोशी-रीमान समीकरण के ध्रुवीय रूप का proof लिखिए।

11. If  $f(z)$  is analytic, then prove that :

यदि  $f(z)$ , विश्लेषिक है, तो सिद्ध कीजिए :

$$(i) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$(ii) \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right| \log |f'(z)| = 0$$