Roll No. . . .

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **8**

A–218

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2024

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time : **3** *Hours*] [*Maximum Marks* : **68**

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :- Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :- सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :- सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :- पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

https://www.mgsuonline.com

Section–A (खण्ड–अ)

1. (i) State Lami's theorem.

लामी प्रमेय का कथन दीजिए।

(ii) Define coefficient of Friction.

घर्षण गुणांक को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write parametric equations of the Catenary.

कैटेनरी के प्राचल समीकरण लिखिए।

(iv) Write definition of Pitch.

पिच की परिभाषा लिखिए।

(v) Define Transverse Acceleration.

अनुप्रस्थ त्वरण को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Simple Harmonic Motion.

सरल आवर्त गति को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write Hooke's law for Elastic Strings.

प्रत्यास्थ डोरियों के लिए हुक का नियम लिखिए।

(viii) Write Energy equation in constrained motion.

प्रतिबंधित गति में ऊर्जा समीकरण लिखिए।

(ix) Write pedal equation of central orbit.

सकेन्द्र कक्षा का पादिक समीकरण लिखिए।

(x) Define Apsidal distance.

स्तब्धिका दूरी की परिभाषा लिखिए।

(xi) Define Oblique Impact.

तिर्यक संघट्ट की परिभाषा लिखिए।

(xii) Define Period of Restitution.

प्रत्यानयन काल की परिभाषा लिखिए।

https://www.mgsuonline.com

Section–B (खण्ड–ब)

2. A heavy uniform rod 30 cm long is suspended from a fixed point by strings fastened to its ends, their lengths being 18 cm and 24 cm. If the rod is inclined to the vertical at an angle θ, prove that :

$$25 \sin \theta = 24$$

एक एकसमान 30 सेमी. लम्बी छड़ एक नियत बिन्दु से दो रस्सियों द्वारा लटकायी गयी है, जो छड़ के सिरों पर बंधी हुयी है। यदि रस्सियों की लम्बाई 18 सेमी. और 24 सेमी. हो तथा साम्यावस्था में छड़ ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाती हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$25 \sin \theta = 24$$

***Or* (अथवा)**

Two rough particles connected by a light string rest on an inclined plane. If their weights and corresponding coefficients of friction are W_1, W_2 and μ_1, μ_2 respectively, show that greatest inclination of the plane for equilibrium is :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$$

एक भारहीन डोरी द्वारा बंधे हुये W_1 तथा W_2 भार के दो रूक्ष कण जिनके घर्षण गुणांक क्रमशः μ_1 तथा μ_2 हैं एक आनत समतल पर रखे हुये हैं। सिद्ध कीजिए कि सन्तुलन की अवस्था में तल का अधिक से अधिकतम झुकाव है :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$$

3. The inclination of the tangents at the extremities of a portion of a common catenary be α and β and l be the length of the portion. If the two extremities are on one side of the catenary, show that the height of one extremity above the other is :

$$l \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

https://www.mgsuonline.com

एक सामान्य कैटेनरी के l लम्बाई के एक भाग के सिरों पर स्पर्श रेखाओं के झुकाव α तथा β हैं। यदि दोनों सिरे कैटेनरी के एक ही ओर हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक सिरे की दूसरे सिरे से ऊँचाई है :

$$l \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

***Or* (अथवा)**

A heavy elastic circular string of natural length $2\pi a$, is placed round a smooth circular cone whose axis is vertical and whose semivertical angle is α. If W be the weight and λ be the modulus of elasticity of the string, prove that it will be in equilibrium in the form of a circle whose radius is :

$$a\left(1 + \frac{W}{2\pi\lambda}\cot\alpha\right)$$

एक भारी प्रत्यास्थ डोरी जिसकी स्वाभाविक लम्बाई $2\pi a$ है, एक चिकने शंकु के चारों ओर लपेटी गयी है। शंकु का अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा अर्धशीर्षकोण α है। यदि डोरी का भार W तथा प्रत्यास्थता मापांक λ है, तो सिद्ध कीजिए कि डोरी जब साम्यावस्था में है, तो उसकी वृत्ताकार आकृति की त्रिज्या $a\left(1 + \frac{W}{2\pi\lambda}\cot\alpha\right)$ है।

4. A point describes a circle of radius a with a uniform velocity v. Show that its radial and transverse accelerations are respectively :

$$-\frac{v^2}{a}\cos\theta \text{ and } -\frac{v^2}{a}\sin\theta$$

If a diameter is taken as initial line and one end of this diameter as pole.

एक बिन्दु एकसमान वेग v से a त्रिज्या के वृत्त पर गतिमान है। सिद्ध कीजिए इसके अरीय व अनुप्रस्थ त्वरण क्रमशः :

$$-\frac{v^2}{a}\cos\theta \text{ और } -\frac{v^2}{a}\sin\theta$$

हैं जबकि वृत्त का कोई एक व्यास प्रारम्भिक रेखा एवं इस व्यास का सिरा ध्रुव लिया जाये।

https://www.mgsuonline.com

Or (अथवा)

A particle moves with SHM in a straight line. In the first second after starting from rest it travels a distance 'a' and in the next second it travels a distance 'b' in the same direction. Prove that the amplitude of motion is $\frac{2a^2}{3a-b}$ and its period is $2\pi \sec^{-1}\left(\frac{b-a}{2a}\right)$.

एक कण SHM के अन्तर्गत एक सरल रेखा में गमन करता है। विरामावस्था से चलने के पश्चात् एक सेकण्ड में यह 'a' दूरी चलता है और अगले सेकण्ड में उसी दिशा में 'b' दूरी चलता है। सिद्ध कीजिए कि गति का आयाम $\frac{2a^2}{3a-b}$ और आवर्तकाल $2\pi \sec^{-1}\left(\frac{b-a}{2a}\right)$ है।

5. A particle of mass m execute SHM in line joining two points A and B on a smooth table and is connected with these points by elastic strings whose tensions is in equilibrium are each T. Show that the time of an oscillation is $2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$ where l, l' are the extensions of the strings beyond their natural lengths.

m द्रव्यमान का एक कण, एक चिकने मेज पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा पर SHM से गतिमान है और वह इन बिन्दुओं से प्रत्यास्थ डोरियों द्वारा बंधा हुआ है जिसका प्रत्येक का तनाव सन्तुलन की दिशा में T है। सिद्ध कीजिए कि एक दोलन का समय $2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$ है, जबकि l तथा l' स्वाभाविक लम्बाई के अतिरिक्त डोरियों में विस्तार है।

Or (अथवा)

A particle is projected with velocity v from the cusp of a smooth cycloid whose axis is verticle and vertex lowest down the arc. If 'a' is the radius of the generating circle, show that the time of reaching the vertex is :

$$2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{4ag}}{v}\right]$$

एक कण किसी चिकने चक्रज के चाप पर जिसका उक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष निम्नतम है, नीचे की ओर उभयाग्र (cusp) से v वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि जनक वृत्त की त्रिज्या 'a' है, तो सिद्ध कीजिए कि कण का शीर्ष पर पहुँचने का समय है :

$$2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{4ag}}{v}\right]$$

https://www.mgsuonline.com

6. Find the law of force towards the pole under which a particle describes equiangular spiral curve :

$$r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$$

ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण समानकोणिक सर्पिल वक्र $r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$ निर्मित करता है।

***Or* (अथवा)**

A planet describes an ellipse about the sun as focus. Prove that its velocity at the end of the minor axis is the Geometric Mean (GM) between its velocities at the ends of any diameter.

एक ग्रह नाभि पर स्थित सूर्य के परित: एक दीर्घवृत्त बनाता है। सिद्ध कीजिए कि लघु अक्ष के एक सिरे पर इसका वेग किसी भी व्यास के सिरों पर वेग का गुणोत्तर माध्य होता है।

Section–C (खण्ड–स)

7. A rod rest wholly within a smooth hemispherical bowl of radius r, its centre of gravity dividing the rod into two portions 'a' and 'b'. Show that if θ be the inclination of the rod to the horizon in the position of equilibrium, then :

(i) $\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$

(ii) $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

where rod makes an angle 2α at the centre of sphere.

एक छड़ जिसका गुरुत्व केन्द्र उसे 'a' व 'b' लम्बाई के दो भागों में विभाजित करता है, r त्रिज्या के एक चिकने गोले के अन्तर पूर्णत: रखी हुयी है। यदि साम्यावस्था में छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$

(ii) $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

जहाँ छड़ गोले के केन्द्र पर कोण 2α अन्तरित करती है। 6+6

https://www.mgsuonline.com

8 (i) A uniform string of weight W is suspended from two points at the same level and a weight W′ is attached to its lowest point. If α and β be now the inclinations to the horizontal of the tangents at the highest and lowest points, prove that :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}$$

W भार की एकसमान रस्सी समान स्तर के दो बिन्दुओं के मध्य लटकी हुयी है, जिसके निम्नतम बिन्दु पर एक भार W′ लगा रखा है। यदि उच्च व निम्न बिन्दु पर स्पर्श रेखायें क्षैतिज से झुकाव कोण α तथा β हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}$$

(ii) Find the null point of the plane X + Y + Z = 0 for the system of forces (X, Y, Z; L, M, N).

बल निकाय (X, Y, Z; L, M, N) हेतु तल X + Y + Z = 0 का शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए। 6+6

9 (i) A point moves in a plane curve, so that its tangential acceleration and the magnitude of the tangential velocity and normal acceleration are in a constant ratio. Show that the intrinsic equation of the path is of the form $S = A\Psi^2 + B\Psi + C$. https://www.mgsuonline.com

एक कण एक वक्र में इस प्रकार गमन करता है कि इसका स्पर्श रेखीय त्वरण सदैव अचर रहता है तथा स्पर्श रेखीय वेग का परिमाण अभिलाम्बिक त्वरण के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि वक्र के नैज समीकरण का रूप $S = A\Psi^2 + B\Psi + C$ होता है।

(ii) A particle of mass m is acted upon by a force $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ towards origin. If it started from rest at a distance a, show that it will arrive at the origin in time $\left(\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}\right)$.

m द्रव्यमान वाले किसी कण पर मूल बिन्दु की ओर $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ बल कार्य करता है। यदि वह बल केन्द्र से 'a' दूरी पर विरामावस्था से रवाना हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह मूल बिन्दु पर $\left(\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}\right)$ समय में पहुँचेगा। 6+6

https://www.mgsuonline.com

10. (i) A heavy particle of weight W, attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a verticle plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and lowest point of its path, show that $n = m + 6$.

W भार का एक कण जो किसी स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी द्वारा लटकाया हुआ है, एक ऊर्ध्वाधर वृत्तीय तल में चलता है। जब कण अपने पथ के उच्चतम तथा निम्नतम बिन्दुओं पर होता है तो डोरी में तनाव क्रमश: mW तथा nW होते हैं सिद्ध कीजिए कि $n = m + 6$।

(ii) A particle of mass m hangs from a fixed point by a light string and is given a small verticle displacement. If l is the length of the string in equilibrium position and n the number of oscillations per second, show that the natural length of the string is :

$$\left(l - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right)$$

m द्रव्यमान का एक कण एक हल्की डोरी द्वारा एक स्थिर बिन्दु से लटका हुआ है तथा इसे लघु ऊर्ध्वाधर विस्थापन दिया गया है। यदि सन्तुलन की अवस्था में डोरी की लम्बाई l है तथा दोलन आवृत्ति n प्रति सेकण्ड हो, तो सिद्ध कीजिए डोरी की स्वाभाविक लम्बाई होगी :

$$\left(l - \frac{g}{4\pi^2 n^2}\right)$$ 6+6

11. A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance a from the origin with velocity which is $\sqrt{2}$ times velocity for a circle of radius a. Show that the equation to its path is :

$$r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$$

एक कण केन्द्रीय त्वरण के अन्तर्गत गतिमान है, जो मूल बिन्दु से दूरी a के घन के व्युत्क्रमानुपाती है तथा इसे ऐसे वेग से फेंका जाता है कि जो a त्रिज्या वाले वृत्त के लिए वेग का $\sqrt{2}$ गुणा हो, तो सिद्ध कीजिए कि पथ का समीकरण $r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$ है। 12

https://www.mgsuonline.com