

Roll No. : .....

Total No. of Questions : 11 ]

[ Total No. of Printed Pages : 7

# A-218

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2023

## MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 3 Hours ]

[ Maximum Marks : 66

### Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

**Note :-** Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

**नोट :-** सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

### Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

**Note :-** Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

**नोट :-** सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

### Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

**Note :-** Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

**नोट :-** पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

**BRI-121**

( 1 )

**A-218** P.T.O.

## Section–A

### (खण्ड–अ)

1. (i) Write Cauchy's definition of continuity.  
सततता की कोशी की परिभाषा लिखिए।
- (ii) State the Mostest Theorem.  
मॉसटेस्ट प्रमेय का प्रकथन दीजिए।
- (iii) Define differentiability of function of two variables.  
दो चर वाले फलन की अवकलनीयता को परिभाषित कीजिए।
- (iv) State Cauchy's mean value theorem.  
कोशी मध्यमान प्रमेय का प्रकथन दीजिए।
- (v) Define Darboux sums.  
डारबू योग को परिभाषित कीजिए।
- (vi) State fundamental theorem of integral calculus.  
समाकलन गणित की मूल प्रमेय का प्रकथन दीजिए।
- (vii) Define limit of a sequence.  
अनुक्रम की सीमा को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Write Leibnitz's test for an alternating series.  
एकान्तर श्रेणी के लिए लीबनिट्ज़ का परीक्षण लिखिए।
- (ix) Define improper integral.  
अनन्त समाकल को परिभाषित कीजिए।
- (x) Define Fourier series.  
फूरिये श्रेणी को परिभाषित कीजिए।

## Section-B

(खण्ड-ब)

2. If a function  $f$  is continuous in closed interval  $[a, b]$  and  $f(a) \neq f(b)$ , then prove that  $f$  assumes every values between  $f(a)$  and  $f(b)$  at least once in  $[a, b]$ .

यदि कोई फलन  $f$  संवृत अन्तराल  $[a, b]$  में सतत् है और  $f(a) \neq f(b)$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $f$  उस अन्तराल में  $f(a)$  तथा  $f(b)$  के मध्य प्रत्येक मान को कम-से-कम एक बार ग्रहण करेगा।

*Or*

(अथवा)

Using definition of limit show that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^2 + 2y = 5$$

सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^2 + 2y = 5$$

3. Prove that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous but not differentiable at  $x = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन बिन्दु  $x = 0$  पर सतत् है परन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Or

(अथवा)

If :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x + \theta h),$$

then find the value of  $\theta$ , where  $f(x) = (x - a)^{5/2}$ , when  $x = a$ .

यदि :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x + \theta h)$$

तो  $\theta$  का मान ज्ञात कीजिए, जबकि  $f(x) = (x - a)^{5/2}$ , जब  $x = a$ ।

4. If  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 2]$  and  $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$ , then find  $U(f, P)$  and  $L(f, P)$ .

यदि  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 2]$  तथा  $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$ , तब  $U(f, P)$  तथा  $L(f, P)$  ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

If  $f \in R[a, b]$ , then show that  $|f| \in R[a, b]$ .

यदि  $f \in R[a, b]$ , तो दर्शाइए कि  $|f| \in R[a, b]$ ।

5. Use the definition of limit of a sequence to prove that  $\left\{\frac{3n}{n+5\sqrt{n}}\right\}$  converges to 3.

अनुक्रम की सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि  $\left\{\frac{3n}{n+5\sqrt{n}}\right\}$ , 3 को अभिसृत होती है।

Or

(अथवा)

Examine for convergence of the series :

$$\sum \left( \frac{n+1}{n^3} \right) x^n$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\sum \left( \frac{n+1}{n^3} \right) x^n$$

6. Test the convergence of Integral  $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ , when  $a \geq 0$ .

समाकल  $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $a \geq 0$  के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Or

(अथवा)

Test the uniform convergence of the sequence  $\left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

अनुक्रम  $\left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  का एकसमान अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

### Section-C

(खण्ड-स)

7. (a) Discuss the nature of discontinuity of the following function at  $x = 1$  :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n e^n}$$

निम्न फलन का  $x = 1$  पर असतता का विवेचन कीजिए :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n e^n}$$

- (b) If a function  $f$  is uniformly continuous on an interval  $E$ , then prove that  $f$  is continuous on  $E$ .

यदि फलन  $f$  अन्तराल  $E$  पर एकसमान सतत् है, तो सिद्ध कीजिए कि उस अन्तराल में  $f$  सतत् होगा। 8,4

8. (a) If a function  $f$  is differentiable in closed interval  $[a, b]$  and  $k$  be a number between  $f'(a)$  and  $f'(b)$ , then prove that there exists a number  $c$  in  $(a, b)$  such that  $f'(c) = k$ .

यदि फलन  $f$  संवृत अन्तराल  $[a, b]$  में अवकलनीय है तथा  $f'(a)$  व  $f'(b)$  के मध्य कोई संख्या  $k$  है, तो सिद्ध कीजिए कि अन्तराल  $(a, b)$  में एक बिन्दु  $c$  विद्यमान होगा कि  $f'(c) = k$  होगा।

- (b) Apply Lagrange's mean value theorem to prove that :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x \quad \forall x > 0$$

लाग्रान्ज मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x \quad \forall x > 0 \quad 8,4$$

9. (a) If  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , then prove that :

$$f \in R[0, 1]$$

and  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$

यदि  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$f \in R[0, 1]$$

तथा  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$

- (b) Let  $f$  be a continuous function defined on interval  $[a, b]$ , then prove that  $f \in R[a, b]$ .

यदि फलन  $f$  अन्तराल  $[a, b]$  पर सतत् है, तो सिद्ध कीजिए कि  $f \in R[a, b]$ । 8,4

10. (a) Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{2!}{3^2} x^2 + \frac{3!}{4^3} x^3 + \frac{4!}{5^4} x^4 + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{2!}{3^2} x^2 + \frac{3!}{4^3} x^3 + \frac{4!}{5^4} x^4 + \dots$$

(b) Let  $\langle x_n \rangle$  be a convergent sequence, then prove that its limit is unique.

$\langle x_n \rangle$  एक अभिसारी अनुक्रम है, तो सिद्ध कीजिए कि इसकी सीमा अद्वितीय होगी। 8,4

11. Find the Fourier series of the function  $f(x) = x + x^2$  in the interval  $(-\pi, \pi)$ . Hence show that :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Also find the sum of the series when  $x = \pm\pi$ .

अन्तराल  $(-\pi, \pi)$  में फलन  $f(x) = x + x^2$  के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$x = \pm\pi$  के लिए श्रेणी का योग भी ज्ञात कीजिए।

8+2+2=12