

A - 144**B.A./B.Sc. (Part - I) Examination, 2018****MATHEMATICS****Third Paper****(Vector Calculus and Geometry)***Time allowed : Three hours**Maximum Marks : 68***Section - A****(Marks : 1 × 12 = 12)**

Answer all Twelve questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 marks.

खण्ड - अ

(अंक : 1 × 12 = 12)

समस्त बारह प्रश्नों के उत्तर दीजिए। (उत्तर सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 01 अंक का है।

Section - B**(Marks : 4 × 5 = 20)**

Answer all Five questions. Each question has internal choice. (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

खण्ड - ब

(अंक : 4 × 5 = 20)

समस्त पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें। (उत्तर सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section - C.

(Marks : 12 × 3 = 36)

Answer any three questions out of five. (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

खण्ड - स

(अंक : 12 × 3 = 36)

पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। (उत्तर सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

SECTION - A

खण्ड - अ

1. (i) Find $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ when (1)

$$\vec{a} = t^2 \vec{i} - t \vec{j} + (2t + 1) \vec{k}$$

$$\vec{b} = 2t \vec{i} + 3 \vec{j} - t^2 \vec{k}$$

ज्ञात कीजिए $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ जब

$$\vec{a} = t^2 \vec{i} - t \vec{j} + (2t + 1) \vec{k}$$

$$\vec{b} = 2t \vec{i} + 3 \vec{j} - t^2 \vec{k}$$

- (ii) Define solenoidal vector. (1)

परिनालीकीय सदिश परिभाषित कीजिए।

- (iii) Define Line Integral and write its Cartesian form. (1)

रेखा समाकलन परिभाषित करते हुए इसका कार्तीय रूप लिखिए।

- (iv) Evaluate $\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$ using Gauss's divergence theorem. (1)

where S is surface of $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

गॉस प्रमेय से ज्ञात कीजिए $\int_S \vec{r} \cdot \hat{n} \, ds$ जहाँ सतह s है,
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(v) Find the coordinates of centre of the following conic : (1)

निम्न शंकु के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

(vi) Find the distance between two points $P(r_1, \theta_1)$ and $Q(r_2, \theta_2)$ (1)

दो बिन्दुओं $P(r_1, \theta_1)$ तथा $Q(r_2, \theta_2)$ के मध्य की दूरी ज्ञात करें।

(vii) Write the equation of sphere passing through the points

$$(0,0,0); (a,0,0); (0,b,0) \quad (1)$$

निम्न बिन्दुओं से गुजरने वाले गोले का समीकरण लिखिए :

$$(0,0,0); (a,0,0); (0,b,0) \quad \text{http://www.mgsuonline.com}$$

(viii) Find the equation of a sphere passing through the following circle and point : (1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + 2y - z = 7; (1,2,-1)$$

निम्न वृत्त एवं बिन्दु से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + 2y - z = 7; (1,2,-1)$$

(ix) Write the equation of enveloping cone of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ with vertex $(1,2,4)$ (1)

गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ के अन्वालोपी शंकु का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष बिन्दु $(1,2,4)$ है।

(x) Find the equation of right circular cylinder whose radius is 4 and axis is $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-5}{6}$ (1)

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 4 हो तथा अक्ष है $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-5}{6}$

(xi) Write the condition that the plane $lx + my + nz = p$ should touch the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. (1)

वह प्रतिबन्ध लिखिए कि समतल $lx + my + nz = p$ केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को स्पर्श करे।

(xii) Define Diametric plane of Paraboloid. (1)

परवलय का व्यासग समतल परिभाषित कीजिए।

SECTION - B

खण्ड - ब

2. Prove that necessary and sufficient condition for a vector $\vec{a}(t)$ to be of constant magnitude is : $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$ (4)

सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}(t)$ के अचर परिमाण का होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है : $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$

OR/अथवा

Find the directional derivative of $u = xy + yz + 3x$ in the direction of vector $i + 2j + 2k$ at $(1,2,0)$ (4)

बिन्दु $(1,2,0)$ पर $u = xy + yz + 3x$ का $i + 2j + 2k$ की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात करें।

3. Evaluate $\int \vec{f} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2) i - 2xyj$ and curve C is rectangle in xy plane bounded by $x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$. (4)
ज्ञात कीजिए $\int \vec{f} \cdot d\vec{r}$ जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2) i - 2xyj$ तथा वक्र C xy समतल में $x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$ से परिबद्ध आयत है।

OR/अथवा

Use Green's theorem to evaluate $\int \{(y - \sin x) dx - \cos x dy\}$

where C is the triangle enclosed by the lines :

$$y=0, x=\frac{\pi}{2} \text{ and } y=\frac{2x}{\pi}. \quad (4)$$

ग्रीन, प्रमेय का प्रयोग कर मान ज्ञात कीजिए $\int_C \{(y - \sin x) dx - \cos x dy\}$

जहाँ वक्र C रेखाओं $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ तथा $y=\frac{2x}{\pi}$ से परिबद्ध त्रिभुज है।

4. Prove that the product of semi-axes of the conic

$$x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 6y + 7 = 0 \text{ is } 2\sqrt{7}. \quad (4)$$

सिद्ध कीजिए कि शंकु $x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$ के अर्द्ध अंशों का गुणनफल $2\sqrt{7}$ है।

OR/अथवा

Find the condition that the straight line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ may touch the circle $r = 2a \cos \theta$. (4)

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि सरल रेखा $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श कर सके।

5. Find the equation of sphere circumscribing the tetrahedron whose faces are : $x=y=z=0$ and $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (4)

चतुष्फलक को परिगत करने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके फलक हैं $x=y=z=0$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

OR/अथवा

Prove that the equation $\sqrt{fx} + \sqrt{gy} + \sqrt{hz} = 0$ represents a cone that touches the coordinate planes and that the equation of reciprocal cone is $fyz + gzx + hxy = 0$. (4)

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\sqrt{fx} + \sqrt{gy} + \sqrt{hz} = 0$ ऐसे शंकु को प्रदर्शित करता है जो निर्देशी समतलों को स्पर्श नहीं करता है तथा व्युत्क्रम शंकु का समीकरण है : $fyz + gzx + hxy = 0$.

6. Prove that the locus of the foot of perpendicular from the centre of ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ to its tangent plane is given by : (4)

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के केन्द्र से इसके स्पर्श त्वाप पर डाले गए लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

OR/अथवा

Find the equation of cone through which five normals to the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$ passes. (4)

परवलज $ax^2 + by^2 = 2cz$ पर पाँच अभिलम्बों से गुजरने वाले शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए।

SECTION - C

खण्ड - स .

7. (a) Prove that $\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ (6)

सिद्ध कीजिए कि $\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$

- (b) Prove that : (6)

सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{Curl}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{ div } \vec{b}$$

8. (a) Verify Gauss's Divergence theorem :

where $\vec{F} = xyi + z^2j + 2yzk$ is defined on tetrahedron bounded by $x = y = z = 0$ and $x + y + z = 1$. (6)

गॉस अपसरण प्रमेय सत्यापित कीजिए :

जहाँ $\vec{F} = xyi + z^2j + 2yzk$

चतुष्फलक $x = y = z = 0$ and $x + y + z = 1$ पर परिभाषित है।

(b) Using Stoke's theorem, evaluate $\int (xydx + xy^2dy)$ (6)

where C is the square in xy-plane with vertices :

(1,0); (-1,0); (0,1); (0,-1)

स्टॉक प्रमेय का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए $\int (xydx + xy^2dy)$

जहाँ वक्र C, xy-समतल में वर्ग है जिसके शीर्ष हैं :

(1,0); (-1,0); (0,1); (0,-1)

(a) Find the axis, vertex, latus rectum and focus of following parabola : (6)

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 4u = 0$$

निम्न परवलय के अक्ष, शीर्ष नाभिलम्ब तथा नाभि ज्ञात कीजिए :

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 4u = 0$$

(b) Prove that the two conics (6)

$\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta_1$ and $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ will touch each other if

$$l_1^2(1 - l_2^2) + l_2^2(1 - e_1^2) = 2l_1l_2(1 - e_1e_2 \cos \alpha)$$

सिद्ध कीजिए कि दो शंकव

$\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta$, तथा $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ परस्पर स्पर्श करेंगे
यदि $l_1^2(1 - e_2^2) + l_2^2(1 - e_1^2) = 2l_1l_2(1 - e_1e_2 \cos \alpha)$

10. (a) Find the equation of sphere whose centre is origin and touches the straight line $2(x+1)=2-y=z+3$ (6)

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र मूल बिन्दु है तथा जो निम्न रेखा को स्पर्श करता है $2(x+1)=2-y=z+3$

- (b) Find the equation of Right circular cylinder whose guiding circle passes through the points (6)

(a,0,0); (0,b,0); (0,0,c)

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त निम्न बिन्दुओं से गुजरता है :

(a,0,0); (0,b,0); (0,0,c)

11. (a) Define Director sphere: Find the equation of director sphere of central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ (6)

नियामक गोला परिभाषित कीजिए। निम्न केन्द्रीय शांकवज

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के नियामक गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that from a given point (α, β, γ) six normals, in general can be drawn to the ellipsoid : (6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

सिद्ध कीजिए कि दिए गए बिन्दु (α, β, γ) से दीर्घवृत्तज

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर सामान्यतः 6 अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं।