

A-138

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

Third Paper (Vector Calculus and Geometry)

Time allowed : Three hours

Maximum Marks : 68

SECTION - A (Marks $1 \times 12 = 12$)

Answer all twelve questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

खण्ड - अ

(अंक $1 \times 12 = 12$)

समस्त बारह प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

SECTION - B (Marks $4 \times 5 = 20$)

Answer all five questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

खण्ड - ब

(अंक $4 \times 5 = 20$)

समस्त पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

SECTION - C (Marks $12 \times 3 = 36$)

Answer any three questions out of five. (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

खण्ड - स

(अंक $12 \times 3 = 36$)

पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

SECTION - A

खण्ड - अ

1. (i) If $\vec{r} = \cos nt \hat{i} + \sin nt \hat{j}$, prove that $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = n\hat{k}$, where n is a constant. 1

यदि $\vec{r} = \cos nt \hat{i} + \sin nt \hat{j}$, तो सिद्ध कीजिये कि $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = n\hat{k}$, जहाँ n अचर है।

- (iii) Define irrotational vector. 1

अधूरीय सदिश परिभाषित कीजिये।

(iii) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k}$, prove that $\operatorname{div} \vec{r} = 3$. 1

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिये कि $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.

(iv) State Gauss divergence theorem. 1

गॉस प्रमेय का कथन कीजिये।

(v) What conic does equation $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2$ represent? 1

समीकरण $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2$ कौन से शांकव को निरूपित करता है?

(vi) Find the polar equation of straight line on which the length of the perpendicular from pole is p and this perpendicular line makes an angle α with the initial line is given. 1

उस सरल रेखा का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिये जिस पर ध्रुव से डाले गये लम्ब की लम्बाई p है तथा लम्ब व प्रारम्भिक रेखा के मध्य कोण α दिया है।

(vii) Define Cone. 1

शंकु को परिभाषित कीजिये।

(viii) Define Cylinder. 1

बेलन को परिभाषित कीजिये।

(ix) Write condition of orthogonality of two spheres. 1

दो गोलों की लाम्बिकता का प्रतिबंध लिखिये।

(x) Define conjugate points. 1

संयुक्त बिन्दु परिभाषित कीजिये।

(xi) Define Polar lines. 1

ध्रुवीय रेखाओं को परिभाषित कीजिये।

(xii) Write the standard equation of the Paraboloid. 1

परवलयज का मानक समीकरण लिखिये।

SECTION - B

खण्ड - ब

2. If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, prove that

$$\text{grad } r^m = mr^{m-2} \vec{r}$$

4

यदि $r = |\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\text{grad } r^m = mr^{m-2} \vec{r}$$

OR/अथवा

Prove that the divergence of any vector is zero.

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश फलन का अपसरण शून्य होता है।

3. Find the lengths and equations of the axes of the conic :

4

निम्न शांकव के अक्षों के समीकरण तथा लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिये :

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$$

OR/अथवा

Find the polar equation of the conic, the focus being the pole.

शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिये, जबकि नाभि ध्रुव हो।

<http://www.mgsuonline.com>

- 4 Evaluate : $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$; where $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$, C is the arc of the curve

$$\vec{r} = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + t\hat{k} \text{ from } t = 0 \text{ to } t = 2\pi.$$

4

मान ज्ञात कीजिये : $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$; जहाँ $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ तथा C वक्र

$\vec{r} = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + t\hat{k}$ का चाप $t = 0$ से $t = 2\pi$ तक है।

OR/अथवा

3

P.T.O.

If V is the volume enclosed by any closed surface S ; show that

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = 6V; \text{ where } \vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}.$$

यदि बंद पृष्ठ S द्वारा परिबद्ध आयतन V हो, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = 6V; \text{ जहाँ } \vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}.$$

5. Show that the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ cuts the second sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$ in a great circle, if $2(uu' + vv' + ww') = 2r'^2 + d + d'$, where r' is the radius of the second sphere.

सिद्ध कीजिये कि गोला $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ द्वितीय गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$ को वृहत्-वृत्त में प्रतिच्छेद करता है, यदि $2(uu' + vv' + ww') = 2r'^2 + d + d'$, जहाँ r' द्वितीय गोले की त्रिज्या है।

OR/अथवा

Find the equation of a cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ and base is the following conic :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0; z = 0.$$

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके जनक रेखा $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ के समान्तर हैं तथा आधार निम्न शांकव है :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0; z = 0.$$

6. A tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ meets the co-ordinate axes in points A, B and C respectively. Find the locus of the centroid of the triangle ABC. 4

दीर्घवृत्तज एवं $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ का कोई स्पर्श समतल अक्षों को क्रमशः A, B, C बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है, तो त्रिभुज ABC के केन्द्रक का गिन्तुपथ ज्ञात कीजिये।

OR/अथवा

Find the equation of the tangent plane at point (x_1, y_1, z_1) of the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$.

परवलज $ax^2 + by^2 = 2cz$ के बिन्दु (x_1, y_1, z_1) पर स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

SECTION - C

खण्ड - स

7. (a) Find the equations of the tangent plane and the normal line to the surface $xyz = 4$ at the point $(1, 2, 2)$. 6

पृष्ठ $xyz = 4$ के बिन्दु $(1, 2, 2)$ पर स्पर्श समतल तथा अभिलम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

- (b) If $r = |\vec{r}|$; where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$; prove that :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

यदि $r = |\vec{r}|$; जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$; तो सिद्ध कीजिये :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

8. (a) Verify Stoke's theorem for the function $\vec{F} = x^2 \hat{i} + xy\hat{j}$ integrated round the square in the plane $z = 0$, whose sides are along the lines $x = y = 0$ and $x = y = a$. 6

फलन $\vec{F} = x^2 \hat{i} + xy\hat{j}$ के लिये स्टॉक प्रमेय का सत्यापन कीजिये, जहाँ \vec{F} का समाकलन समतल $z = 0$ में स्थित वर्ग के चारों ओर किया गया है, जिसकी भुजायें रेखा $x = y = 0$ तथा $x = y = a$ के अनुदिश हैं।

- (b) Show that the area bounded by a simple closed curve C is given by :

$$\frac{1}{2} \int_C (x \, dy - y \, dx).$$

6

दर्शाइये कि एक सरल बन्द वक्र C द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल निम्न द्वारा प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2} \int_C (x \, dy - y \, dx).$$

9. (a) Find the polar equation of tangent at any point of a conic.

शंकव के किसी बिन्दु पर स्पर्श-रेखा का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिये ।

6

- (b) PSP' is a focal chord of the conic: prove that the tangent at P and P' intersects on the directrix. <http://www.mgsuonline.com>

PSP' किसी शंकव की नाभीय जीवा है, सिद्ध कीजिये कि बिन्दु P तथा P' पर खींची गई स्पर्श-रेखाएँ परस्पर नियता पर काटती हैं ।

6

10. (a) Find the equation of the sphere which passes through the points (1, 0, 0); (0, 1, 0) and (0, 0, 1) and has its radius as small as possible.

बिन्दु (1, 0, 0); (0, 1, 0) और (0, 0, 1) में से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हों ।

6

- (b) Prove that the equation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

represents a cone if :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d.$$

6

सिद्ध कीजिये कि सभी

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

एक शंकु को व्यक्त करती है, यदि :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d.$$

11. (a) Prove that the locus of the poles of the tangent planes of $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ w.r.t. $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ is the following conicoid :

$$\frac{\alpha^2 x^2}{a} + \frac{\beta^2 y^2}{b} + \frac{\gamma^2 z^2}{c} = 1$$

6

सिद्ध कीजिये कि $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ के सापेक्ष $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के स्पर्श समतलों का बिन्दुपथ निम्न शांकवज्ञ है :

$$\frac{\alpha^2 x^2}{a} + \frac{\beta^2 y^2}{b} + \frac{\gamma^2 z^2}{c} = 1$$

- (b) Find the locus of the equal conjugate diameters of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 6

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के समान संयुक्त व्यास का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये।