

Roll No. : .....

Total No. of Questions : 11 ]

[ Total No. of Printed Pages : 7

# SLA-125

## B.A./B.Sc. Part-III Due of Part-I (Supplementary) Examination, 2022

### MATHEMATICS

Paper - II

(Calculus)

Time : 1½ Hours ]

[ Maximum Marks : 66

#### Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

**Note :-** Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

**नोट :-** सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

#### Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

**Note :-** Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

**नोट :-** सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

#### Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

**Note :-** Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

**नोट :-** पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-22

( 1 )

SLA-125 P.T.O.

**Section–A**

(खण्ड–अ)

1 each

1. (i) Write the formula for lengths of polar normal.  
ध्रुवी अभिलम्ब की लम्बाई का सूत्र लिखिए।
- (ii) Define Asymptote.  
अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define Homogeneous function.  
समघात फलन को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Jacobian.  
जेकोबियन को परिभाषित कीजिए।
- (v) Write the necessary conditions for  $f(a, b)$  to be an extreme value of  $f(x, y)$ .  
फलन  $f(x, y)$  के चरम मान  $f(a, b)$  होने का आवश्यक प्रतिबंध लिखिए।
- (vi) Define the point of Inflexion.  
नति परिवर्तन बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Write the formula of Legendre's duplication.  
ल्लिजेन्ड्रे द्विगुणन सूत्र लिखिए।
- (viii) Evaluate :  
मान ज्ञात कीजिए :
- $$\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dx dy$$
- (ix) Define Quadrature.  
क्षेत्रकलन को परिभाषित कीजिए।
- (x) Find the length of the arc of the curve  $y = \log \sec x$  from  $x = 0$  to  $x = \frac{\pi}{3}$ .  
वक्र  $y = \log \sec x$  के  $x = 0$  से  $x = \frac{\pi}{3}$  तक चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

**Section-B**

(खण्ड-ब)

4 each

2. Find the envelope of the family of the following straight lines;  $\alpha$  being the parameter :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

निम्न सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ  $\alpha$  प्राचल है :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

*Or*

(अथवा)

Find the radius of curvature at point  $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$  on the folium :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

फोलियम  $x^3 + y^3 = 3axy$  के बिन्दु  $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$  पर वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

3. If  $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$ , prove that :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

यदि  $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$ , सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

*Or*

(अथवा)

If  $u^3 + v^3 = x + y$  and  $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ , then find the value of  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ .

यदि  $u^3 + v^3 = x + y$  तथा  $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ , तो  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  का मान ज्ञात कीजिए।

**BI-22**

( 3 )

**SLA-125** P.T.O.

4. Find the maximum value of :

$$u = \sin x \sin y \sin (x + y).$$

उच्चतम मान ज्ञात कीजिए :

$$u = \sin x \sin y \sin (x + y)$$

**Or**

**(अथवा)**

Find the nature and position of double points of the curve :

$$x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$$

निम्न वक्र के द्विक बिन्दुओं की स्थिति व प्रकृति ज्ञात कीजिए :

$$x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$$

5. Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(a \cos^4 \theta + b \sin^4 \theta)}} = \frac{\left\{ \frac{1}{4} \right\}^2}{4(ab)^{1/4} \sqrt{\pi}}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(a \cos^4 \theta + b \sin^4 \theta)}} = \frac{\left\{ \frac{1}{4} \right\}^2}{4(ab)^{1/4} \sqrt{\pi}}$$

**Or**

**(अथवा)**

Evaluate the following integral by changing the order of integration :

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

6. Find the intrinsic equation of the cardioid  $r = a(1 + \cos \theta)$  taking pole as the fixed point. Hence or otherwise, show that :

$$S^2 + 9\rho^2 = 16a^2$$

ध्रुव को स्थिर बिन्दु मानकर कार्डियोइड  $r = a(1 + \cos \theta)$  का नैज समीकरण ज्ञात कीजिए। फलतः या अन्यथा प्रदर्शित कीजिए :

$$S^2 + 9\rho^2 = 16a^2$$

*Or*

(अथवा)

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

### Section-C

(खण्ड-स)

7. Show that the asymptotes of the following cubic cut the curve again in three points which lie on the straight line  $x - y + 1 = 0$  :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न त्रिपद वक्र के अनन्तस्पर्शी वक्र को तीन बार काटते हैं तथा रेखा  $x - y + 1 = 0$  पर स्थित हो :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0 \quad 2+8+2=12$$

8. (a) If  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ , then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

यदि  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

(b) If  $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ , then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

यदि  $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 6+6=12$$

9. Find the maximum value of  $x^p y^q z^r$ , where  $ax + by + cz = p + q + r$ .

$x^p y^q z^r$  का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जहाँ  $ax + by + cz = p + q + r$ . 12

10. Show that :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

Hence deduce that :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}}$$

प्रदर्शित कीजिए कि :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

फलतः निगमन कीजिए कि :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \quad 8+4=12$$

11. Find the volume generated by the Lemniscate  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ , when it revolves about the following :

(a) Initial line

(b) Line  $\theta = \frac{\pi}{2}$

द्विपाशी  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  से जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जब यह निम्न के परितः परिभ्रमण करें :

(अ) आरम्भिक रेखा

(ब) रेखा  $\theta = \frac{\pi}{2}$

10+2=12