

Roll No. : .....

Total No. of Questions : 11 ]

[ Total No. of Printed Pages : 8

# A-132

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2022

## MATHEMATICS

Paper - II

(Calculus)

Time : 3 Hours ]

[ Maximum Marks : 66

### Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

**Note :-** Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

**नोट :-** सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

### Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

**Note :-** Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

**नोट :-** सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

### Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

**Note :-** Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

**नोट :-** पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BR-264

( 1 )

A-132 P.T.O.

## Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Asymptotes.  
अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Write the parametric equation of radius of curvature.  
वक्रता-त्रिज्या का प्राचलिक समीकरण लिखिए।
- (iii) State the Euler's theorem on homogeneous function.  
समघात फलनों के लिए आयलर प्रमेय का कथन लिखिए।
- (iv) If :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

then find the value of :

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$$

यदि :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

है तो  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$  का मान ज्ञात कीजिए।

- (v) What are the sufficient conditions for a function  $f(a, b)$  to be an extreme value ?  
फलन  $f(a, b)$  के चरम मान ज्ञात करने के लिए क्या पर्याप्त शर्तें होती हैं ?
- (vi) Write down the importance of curve tracing.  
वक्र अनुरेखण का महत्व लिखिए।
- (vii) Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

(viii) Prove that :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = 3$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = 3$$

(ix) Define Quadrature.

क्षेत्रकलन को परिभाषित कीजिए।

(x) Write down the formula for volume of solid of revolution (about  $x$ -axis).

परिक्रमण घनाकृति का आयतन ज्ञात करने का सूत्र लिखिए ( $x$ -अक्ष के परितः)।

### Section-B

#### (खण्ड-ब)

2. Show that the envelope of straight line joining the two extremities of a pair of semi-conjugate diameters of the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

is the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

के अर्ध-संयुग्मी व्यासों के सिरो को मिलाने वाली रेखा का अन्वालोप  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$  है।

4

Or

(अथवा)

Find the length of chord of curvature through the pole of the cardioid  
 $r = a(1 + \cos \theta)$ .

कार्डियोइड  $r = a(1 + \cos \theta)$  के ध्रुव से गुजरने वाली वक्रता-जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4

3. If  $u = e^{xyz}$ , then prove that :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

यदि  $u = e^{xyz}$  है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz} \quad 4$$

Or

(अथवा)

If  $u = f(y - z, z - x, x - y)$ , then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

यदि  $u = f(y - z, z - x, x - y)$  है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad 4$$

4. Find the points where the function  $x^3 + y^3 - 3axy$  has maximum or minimum value.

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन  $x^3 + y^3 - 3axy$  का मान उच्चतम या न्यूनतम है। 4

*Or*

(अथवा)

If  $u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$ , where :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

prove that the stationary value of  $u$  is given by :

$$x = \frac{\Sigma a}{a}, y = \frac{\Sigma a}{b}, z = \frac{\Sigma a}{c}$$

यदि  $u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$ , जहाँ :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

सिद्ध कीजिए कि  $u$  का स्तब्ध मान निम्न से प्राप्त होता है :

$$x = \frac{\Sigma a}{a}, y = \frac{\Sigma a}{b}, z = \frac{\Sigma a}{c}$$

4

5. Evaluate the following integral by changing to polar co-ordinates :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{(x^2+y^2)} dx dy$$

निम्न समाकलन को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तित करके मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{(x^2+y^2)} dx dy$$

4

*Or*

(अथवा)

Evaluate :

(i)  $\Gamma(-1/2)$

(ii)  $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

(iii)  $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$

(iv)  $\int_0^1 x^{n-1} \left( \log \frac{1}{x} \right)^{m-1} dx$

मान ज्ञात कीजिए :

(i)  $\Gamma(-1/2)$

(ii)  $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

(iii)  $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$

(iv)  $\int_0^1 x^{n-1} \left( \log \frac{1}{x} \right)^{m-1} dx$

1×4=4

6. (i) State Dirichlet's integral.

डिरिचलेट समाकलन का कथन लिखिए।

(ii) Show that :

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8abc}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8abc}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

1,3

*Or*

(अथवा)

Find the surface of the solid generated by the revolution of the astroid

$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  about the  $x$ -axis.

ऐस्ट्रॉयड  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  द्वारा  $x$ -अक्ष के परितः परिक्रमण से जनित घनाकृति का पृष्ठीय

क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4

**Section-C**

(खण्ड-स)

7. (i) Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

- (ii) At any point P of the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

prove that :

$$\rho_1^{2/3} + \rho_2^{2/3} = (ab)^{-2/3}(a^2 + b^2),$$

where  $\rho_1, \rho_2$  are the radii of curvature at the extremities of the conjugate diameters.

दीर्घवृत्त :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

के किसी बिन्दु P पर सिद्ध कीजिए :

$$\rho_1^{2/3} + \rho_2^{2/3} = (ab)^{-2/3}(a^2 + b^2),$$

जहाँ  $\rho_1, \rho_2$  संयुग्मी व्यास के छोरों पर वक्रता-त्रिज्याएँ हैं।

6,6

8. (i) Find  $\frac{dy}{dx}$ , when  $x^3 + y^3 = 3axy$ .

ज्ञात कीजिए  $\frac{dy}{dx}$ , जबकि  $x^3 + y^3 = 3axy$ .

- (ii) If :

$$u_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1x_2}{x_3},$$

prove that :

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4$$

यदि :

$$u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3 x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3},$$

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4 \quad 3,9$$

9. Trace the curve :

$$y^2(a + x) = x^2(a - x)$$

वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$y^2(a + x) = x^2(a - x) \quad 12$$

10. Change the order of integration in the following double integral :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} v \, dx \, dy$$

निम्न द्वि-समाकल का क्रम बदलिए :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} v \, dx \, dy \quad 12$$

11. Find the area common to the following curves :

$$r = a, r = a(1 + \cos \theta)$$

निम्न वक्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$r = a, r = a(1 + \cos \theta) \quad 12$$