

A-127

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

Second Paper (Calculus)

Time allowed : Three hours

Maximum Marks : 66

SECTION - A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Answer all ten questions (Answer limit 50 words). Each question carries 01 mark.

खण्ड - अ

(अंक : 1 × 10 = 10)

समस्त दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 01 अंक का है।

SECTION - B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Answer all five questions. Each questions has internal choice (Answer limit 200 words).
Each question carries 04 marks.

खण्ड - ब

(अंक : 4 × 5 = 20)

समस्त पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 04 अंक का है।

SECTION - C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Answer any three questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

खण्ड - स

(अंक : 12 × 3 = 36)

पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

SECTION - A

खण्ड - अ

1. (i) Define Envelopes and Evolutes. (1)
अन्वसोप एवं केन्द्रज को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Write the radius of curvature for Cartesian equation. (1)
वक्रता-त्रिज्या का कार्तीय समीकरण लिखिए।

- (iii) Write the formula for second derivative of an implicit-functions. (1)
अस्पष्ट फलन का द्वितीय-अवकलज ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

- (iv) If $x = u(1 + v)$ and $y = v(1 + u)$, then find the value of $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. (1)

यदि $x = u(1 + v)$ तथा $y = v(1 + u)$, तो $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (v) Write the criteria for extreme value of $f(x, y)$. (1)

फलन $f(x, y)$ के चरम मान की कसौटी लिखिए।

- (vi) Find the asymptotes by inspection method of the following curve : (1)

निम्न वक्र की अनन्त-स्पर्शियाँ निरीक्षण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

$$(x - y + 2)(2x - 3y + 4)(4x - 5y + 6) + (5x - 6y + 7) = 0$$

- (vii) Evaluate : (1)

मान ज्ञात कीजिए :

$$\sqrt{(0.1)} \sqrt{(0.2)} \sqrt{(0.3)} \dots \sqrt{(0.9)}$$

- (viii) Evaluate : (1)

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy \, dx \, dy$$

- (ix) Write the Area of Polar Curves. (1)

ध्रुवी वक्रों का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

- (x) Find the length of the arc of the equiangular spiral $r = a e^{\theta \cot \alpha}$ between the points for which the radii vectors are r_1 and r_2 . (1)

समान कोणिक सर्पिल $r = a e^{\theta \cot \alpha}$ पर त्रिज्य सदिशों r_1 तथा r_2 के मध्य चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

SECTION - B

खण्ड - ब

2. Prove that the envelope of the family of Parabolas $\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} + \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)} = 1$ is an Asteroid when $ab = c^2$, c being constant. (4)

सिद्ध कीजिए कि परवलयों $\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} + \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)} = 1$, के कुल का अन्वालोप एक एस्ट्रायड होता है जबकि $ab = c^2$, c अचर है।

OR/अथवा

In the ellipse $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ (polar form), find the length of

- (a) Polar subtangent
(b) the perpendicular from the pole on the tangent

दीर्घवृत्त $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ (ध्रुवी रूप) में लम्बाई ज्ञात कीजिए :

- (a) ध्रुवी अघःस्पर्शी की
(b) ध्रुव से स्पर्श रेखा पर लम्ब

3. If $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}} \right)$, then prove that : (4)

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20} \tan u.$$

यदि $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}} \right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20} \tan u.$$

OR/अथवा

If J be the Jacobian of the system u, v with regard to x, y and J' the Jacobian of x, y with regard to u, v , then prove that $J J' = 1$.

यदि x, y के सापेक्ष निकाय u, v का जेकोबियन J हो तथा u, v के सापेक्ष x, y का जेकोबियन J' हो तो सिद्ध कीजिए : $J J' = 1$

4. If $u = a^3 x^3 + b^3 y^3 + c^3 z^3$ where $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$; then prove that the stationary value of u , is given by (4)

$$x = \frac{\bar{z}a}{a}; y = \frac{\bar{z}a}{b}; z = \frac{\bar{z}a}{c}$$

यदि $u = a^3 x^3 + b^3 y^3 + c^3 z^3$ जहाँ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि u का स्तब्ध मान निम्न प्राप्त होता है :

$$x = \frac{\bar{z}a}{a}; y = \frac{\bar{z}a}{b}; z = \frac{\bar{z}a}{c}$$

OR/अथवा

Prove that every point of intersection of the curve $y = c \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ with x -axis is a point of inflexion.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = c \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ का x -अक्ष के साथ प्रत्येक प्रतिच्छेद बिन्दु इसका नति-परिवर्तन बिन्दु होता है।

Prove that : $\int_0^1 x^m (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ and $m > -1$. (4)

सिद्ध कीजिए $\int_0^1 x^m (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ तथा $m > -1$.

OR/अथवा

Integrate $r \sin \theta$ over the area of the Cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line.

कार्डियाइड $r = a(1 + \cos \theta)$ के आरम्भिक रेखा से ऊपर वाले क्षेत्र पर $r \sin \theta$ का समाकलन कीजिए।

6. Find the whole length of the Cartesian form Hypocycloid :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$$

Hence deduce that $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

(4)

निम्न कार्तीय अंतश्चक्रज की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$$

फलतः निगमन कीजिए : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

OR/अथवा

Evaluate :

$$\int \int \int x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

where $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ and $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \int \int x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

जहाँ $x, y, z \geq 0$ तथा $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$.

SECTION - C

खण्ड - स

7. Prove that four asymptotes of the following curve cut the curve again in eight points which lie on an ellipse of eccentricity $4/5$: (2+8+2=12)

$$xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 144 = 0$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न वक्र की चारों अनन्त-स्पर्शियाँ वक्र को पुनः आठ बिन्दुओं पर काटती हैं, जो उत्केन्द्रता $4/5$ वाले दीर्घवृत्त पर स्थित हैं :

$$xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 144 = 0$$

8. (a) If $u = e^{xyz}$, then prove that : $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$ (6+6=12)

यदि $u = e^{xyz}$, तो सिद्ध कीजिए : $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$

(b) If $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$; then prove that : $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

यदि $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$; तो सिद्ध कीजिए : $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

9. If $u = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$, then show that the maximum and minimum value of u are given by (12)

$$\frac{l^2}{u-a^2} + \frac{m^2}{u-b^2} + \frac{n^2}{u-c^2} = 0.$$

यदि $u = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि u के उच्चतम तथा निम्नतम मान निम्न प्राप्त होते हैं :

$$\frac{l^2}{u-a^2} + \frac{m^2}{u-b^2} + \frac{n^2}{u-c^2} = 0.$$

10. If $e^2 \leq 1$, show that : (8+2+2=12)

$$\int_0^{\pi/2} \log(1 - e^2 \sin^2 x) dx = \pi \log \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \right\}$$

Hence, deduce that :

(i) $\int_0^{\pi/2} \log(1 - \sin^2 x) dx = -\pi \log 2 = \pi \log \frac{1}{2}.$

(ii) $\int_0^{\pi/2} 2 \log \cos x dx = -\pi \log 2.$

यदि $e^2 \leq 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \log(1 - e^2 \sin^2 x) dx = \pi \log \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \right\}$$

फलतः निगमन कीजिए :

$$(i) \int_0^{\pi/2} \log(1 - \sin^2 x) dx = -\pi \log 2 = \pi \log \frac{1}{2}.$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} 2 \log \cos x dx = -\pi \log 2.$$

11. Find the volume of the solid generated by revolving the cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$; $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 < \theta \leq \pi$ about (12)

(i) tangent at the vertex

(ii) axis of y

चक्रज $x = a(\theta + \sin \theta)$; $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 < \theta \leq \pi$ द्वारा जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि निम्न के परितः परिक्रमण करे :

(i) शीर्ष पर स्पर्शरेखा

(ii) y-अक्ष

<https://www.mgsuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से