

A-117

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

First Paper (Algebra)

Time allowed : Three hours
Maximum Marks : 66

SECTION – A

(Marks $1 \times 10 = 10$)

Answer all **ten** questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

खण्ड – अ

(अंक $1 \times 10 = 10$)

समस्त दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 50 शब्द)। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

SECTION – B

(Marks $4 \times 5 = 20$)

Answer all **five** questions (Answer limit 200 words). Each question has internal choice. Each question carries 4 marks.

खण्ड – ब

(अंक $4 \times 5 = 20$)

समस्त पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

SECTION – C

(Marks $12 \times 3 = 36$)

Answer any **three** questions out of **five** (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

खण्ड – स

(अंक $12 \times 3 = 36$)

पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

SECTION – A

खण्ड – अ

Attempt all **10** questions (Answer should not exceed 50 words in each question).
सभी **10** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। (उत्तर सीमा 50 शब्द)।

1. (i) Define symmetric and unitary matrix. (1)
सममित एवं ऐकिक मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Eigen value and Eigen vectors. (1)
आइगेन मान एवं आइगेन सदिश को परिभाषित कीजिए।

(1)

- (iii) Define factor theorem for roots of an equation.
समीकरण के मूलों के लिए गुणनखण्ड प्रमेय को परिभाषित कीजिए। (1)
- (iv) Define Klein 4 group.
क्लाइन 4-समूह को परिभाषित कीजिए। (1)
- (v) Write the Descarte's rule of sign for algebraic equations.
बीजीय समीकरण के लिए देकार्टे चिह्न नियम लिखिए। (1)
- (vi) Define order of group and order of an element of group.
समूह की कोटि एवं समूह के किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए। (1)
- (vii) Define Left coset and Right coset.
वाम सह-समुच्चय एवं दक्षिण सह-समुच्चय को परिभाषित कीजिए। (1)
- (viii) Define normal subgroup.
प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए। (1)
- (ix) Define Kernel of homomorphism of group.
समूह समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए। (1)
- (x) Define symmetric group of degree n.
n अशांक सममित समूह को परिभाषित कीजिए। (1)

SECTION - B

खण्ड - ब

Attempt all 5 questions. Each question has internal choice (Answer should not exceed 200 words in each question).

सभी 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें। प्रत्येक प्रश्न की उत्तर सीमा 200 शब्द।

2. Find the condition that the roots of the equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ may be in A.P. and G.P. (4)
प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि समीकरण $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ के मूल स.श्रे. एवं गु.श्रे. में हो।

OR/अथवा

Solve the following reciprocal equation : (4)

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$$

निम्न व्युत्क्रम समीकरण हल कीजिए :

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$$

3. Find the column rank of the following matrix : (4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित मैट्रिक्स की स्तम्भ जाति ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

OR/अथवा

Apply matrix theory to solve the following system of equations by e-transformations method :

(4)

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को e-पंक्ति रूपान्तरणों से हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

4. If a and b are any two elements of a group G . Then show that G is an abelian group iff $(ab)^2 = a^2b^2$.

(4)

यदि a और b किसी ग्रुप के दो अवयव हों, तो सिद्ध कीजिए कि G एक आबेली ग्रुप है यदि $(ab)^2 = a^2b^2$

OR/अथवा

Show that the set $\{z \in C; |z| = 1\}$ is a multiplicative group.

(4)

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{z \in C; |z| = 1\}$ एक गुणनात्मक ग्रुप है।

5. A sub-group H of a group G is normal sub-group $\Leftrightarrow xHx^{-1} \forall x \in G$.

(4)

किसी समूह G का कोई उपग्रुप H एक प्रासामान्य उपग्रुप होता है यदि $\Leftrightarrow xHx^{-1} \forall x \in G$

OR/अथवा

Every homomorphic image of an abelian group is abelian.

(4)

प्रत्येक आबेली ग्रुप का समाकारी प्रतिबिम्ब भी आबेली होता है।

6. If $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma = (2 \ 3 \ 4)$, then compute $\rho \sigma \rho^{-1}$ and verify that

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(2) \ \rho(3) \ \rho(4)).$$

(4)

यदि $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma = (2 \ 3 \ 4)$ है, तो $\rho \sigma \rho^{-1}$ की परिकल्पना कीजिए एवं सत्यापित कीजिए

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(2) \ \rho(3) \ \rho(4))$$

OR/अथवा

If order of an element of a group G is n , then $a^m = e \Leftrightarrow m$ is multiple of n .

(4)

यदि किसी समूह G के एक अवयव की कोटि n हो, तो $a^m = e \Leftrightarrow m, n$ का गुणज हो।

SECTION - C

खण्ड - स

Answer any **three** questions out of **five** (Answer should not exceed **500** words in each question).

पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **500** शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

7. Solve the cubic equation $9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ by Cardon's method. (12)

त्रिघात समीकरण $9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

8. Show that the following matrix A satisfies Cayley-Hamilton theorem. Hence find its inverse A^{-1} . (12)

प्रदर्शित कीजिए कि मिन्न मैट्रिक्स A कैली-हैमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करती है। फलत: उसकी प्रतिलोम मैट्रिक्स A^{-1} ज्ञात कीजिए।

9. For any element a of a group G : (12)

$$0(a) = 0(x^{-1}ax), \forall x \in G$$

एक समूह G के किसी अवयव a के लिए :

$$0(a) = 0(x^{-1}ax), \forall x \in G$$

10. State and prove fundamental theorem of group morphism. (12)

समूह समाकारिता का मूलभूत प्रमेय का प्रकथन लेखिए एवं सिद्ध कीजिए।

11. If $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1\ 3\ 4)\ (5\ 6)\ (2\ 7\ 8\ 9)$, then find $\sigma^{-1} \rho \sigma$ and by expressing the permutation ρ as the product of disjoint cycles, find whether ρ is an even permutation or odd permutation. Also, find its order. (12)

$$\text{यदि } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$\sigma = (1\ 3\ 4)\ (5\ 6)\ (2\ 7\ 8\ 9)$ हो तो $\sigma^{-1} \rho \sigma$ ज्ञात कीजिए तथा क्रमचय ρ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइये कि ρ सम क्रमचय है या विषम क्रमचय। ρ की कोटी भी बताइये।